Université de Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

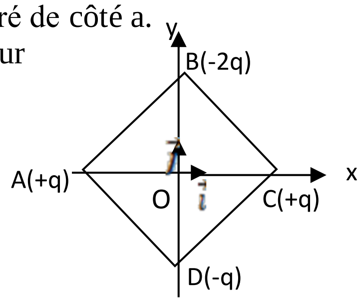
Année Universitaire 2022/2023
Durée : 01 h 30min
1ère Année LMD-MATH

Examen de rattrapage d'électricité

Exercice 1: (07pts)

On place quatre charges ponctuelles aux sommets ABCD d'un carré de côté a.

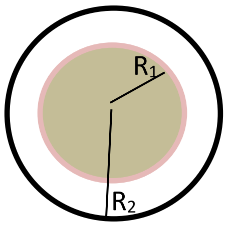
1- Calculer la résultante des forces électrostatiques exercées sur la charge (+q) située en A
2- Déduire le champ électrique au point A et représenter le.
3- Exprimer le potentiel V au point A
4- Déterminer et représenter le champ électrostatique au point O (centre du carré).



Exercice 2: (08 pts)

Soient deux sphères concentriques de centre O de rayons R_1 et R_2 respectifs tel que $R_1 < R_2$. La sphère de rayon R_1 est chargée **en volume** avec une densité volumique $\boldsymbol{\rho = A/r}$ (A constante). La seconde de rayon R_2 est chargée en **surface** avec une densité de charge surfacique $\boldsymbol{\sigma}$ **constante**.

1- En utilisant le théorème de GAUSS trouver l'expression du champ électrostatique E(r) en tout point de l'espace.
2- En déduire l'expression du potentiel électrique V(r) en tout point de l'espace.

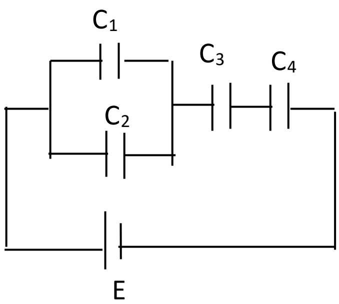


Exercice 3: (03 pts)

Soit un groupement de condensateurs suivant.

1- Déterminer la capacité équivalente de l'ensemble.
2- Calculer la charge de chaque condensateurs
3- Calculer la différence de potentienl U entre chaque condensateur

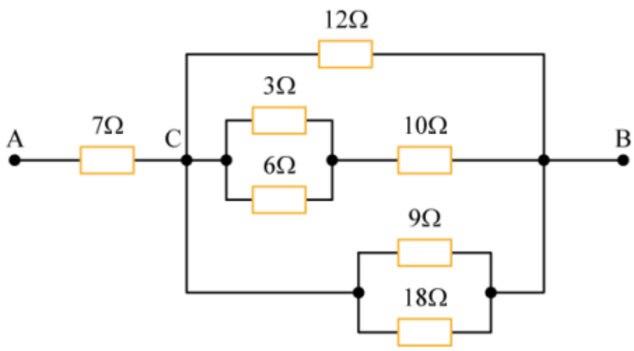
On donne : $C_1 = 1\mu F$ $C_2 = 2\mu F$; $C_3 = C_4 = 3\ \mu F$ et $E = 12V$



Exercice 4: (02 pts)

On considère le circuit suivant.

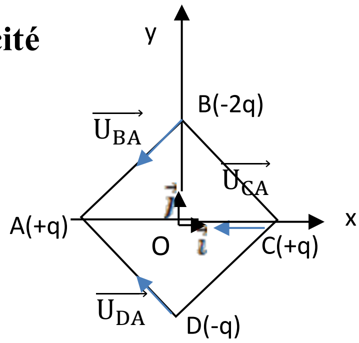
Calculer la résistance équivalente R_{eq}



Université de Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année Universitaire 2022/2023
Durée : 01 h 30min
1ère Année LMD-MATH

Corrigé du rattrapage d'électricité



<u>Exercice 1 : 07 Pts</u>

-La force électrique au point A <u>(03pts)</u>

$\overrightarrow{F_A} = \overrightarrow{F_{BA}} + \overrightarrow{F_{DA}} + \overrightarrow{F_{CA}}$ (0,5 pts)

$\overrightarrow{F_{BA}} = k\frac{q_A q_B}{AB^2}\overrightarrow{U_{BA}}$, (0,25 pts) $\overrightarrow{F_{DA}} = k\frac{q_A q_D}{AD^2}\overrightarrow{U_{DA}}$, (0,25 pts)

$\overrightarrow{F_{CA}} = k\frac{q_C q_A}{CA^2}\overrightarrow{U_{CA}}$, (0,25 pts) ,$CA^2=2a^2$ (0,25 pts), $DA^2= BA^2=a^2$ (0,25 pts)

$\overrightarrow{U_{CA}} = -\vec{\imath}$, (0,25 pts) $\overrightarrow{U_{BA}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}\vec{\imath} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\jmath}$ (0,25 pts) et $\overrightarrow{U_{DA}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\imath} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\jmath}$ (0,25 pts)

$$\overrightarrow{F_A} = k\frac{q^2}{2a^2}(-\vec{\imath}) - 2k\frac{q^2}{a^2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\imath} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\jmath}\right) - k\frac{q^2}{a^2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\imath} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\jmath}\right)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{F_A} = -k\frac{q^2}{a^2}\left(\frac{1}{2}\vec{\imath}\right) + k\frac{q^2}{a^2}\left(\sqrt{2}\vec{\imath} + \sqrt{2}\vec{\jmath}\right) + k\frac{q^2}{a^2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\imath} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\jmath}\right)$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\overrightarrow{F_A} = k\frac{q^2}{a^2}\left[\left(-\frac{1}{2} + 3\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\vec{\imath} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\jmath}\right]}$$ (0,5 pts)

2- Le champ électrique exercé sur la charge $q_B= -2q$ (01pt)

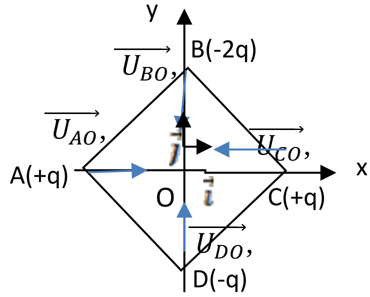
$\overrightarrow{E_A} = \frac{\overrightarrow{F_A}}{q_{AB}}$ (0,5 pts) $= k\frac{q}{a^2}\left(\frac{1}{(q)}\left[\left(-\frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)\vec{\imath} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\jmath}\right]\right)\vec{\jmath}$ $\Rightarrow \boldsymbol{\overrightarrow{E_B} = k\frac{q}{a^2}\left[\left(-\frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)\vec{\imath} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\jmath}\right]}$ (0,5 pts)

3- Le potentiel V_B crée au point B (01pt)

$V_A = V_B + V_D + V_C$ (0,5 pts)

avec $V_B = k\frac{q_A}{AB}$, $V_D = k\frac{q_D}{DA}$, $V_C = k\frac{q_C}{CA}$

$V_A = -2k\frac{q}{a} + k\frac{q}{a\sqrt{2}} - k\frac{q}{a}$ $\Rightarrow \boldsymbol{V_D = k\frac{q}{a}\left(-3 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$ (0,5 pts)



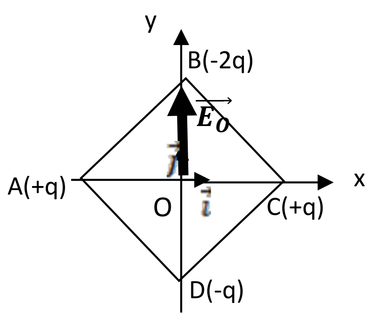
4- le champ électrique au centre O <u>(02pts)</u>

$\overrightarrow{E_O} = \overrightarrow{E_{AO}} + \overrightarrow{E_{BO}} + \overrightarrow{E_{CO}} + \overrightarrow{E_{DO}}$ (0,5 pts)

$\overrightarrow{E_{AO}} = k\frac{q_A}{AO^2}\overrightarrow{U_{AO}}$, $\overrightarrow{E_{BO}} = k\frac{q_B}{BO^2}\overrightarrow{U_{BO}}$, $\overrightarrow{E_{CO}} = k\frac{q_C}{CO^2}\overrightarrow{U_{CO}}$,

$\overrightarrow{E_{DO}} = k\frac{q_D}{DO^2}\overrightarrow{U_{DO}}$ (0,5 pts)

$DB^2=2a \Rightarrow DB = a\sqrt{2}$ donc $DO = \frac{DB}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ (0,25 pts)



$\Rightarrow DO^2= \frac{a^2}{2}$ et $AO^2 = CO^2= DO^2= BO^2=\frac{a^2}{2}$

$\overrightarrow{U_{AO}} = \vec{\imath}$, $\overrightarrow{U_{CO}} = -\vec{\imath}$, $\overrightarrow{U_{DO}} = \vec{\jmath}$, $\overrightarrow{U_{BO}} = -\vec{\jmath}$ (0,25 pts)

$\overrightarrow{E_O} = 2k\frac{q}{a^2}\vec{\imath} - 2k\frac{q}{a^2}\vec{\imath} - 2k\frac{q}{a^2}\vec{\jmath} + 4k\frac{q}{a^2}\vec{\jmath} \Rightarrow \boldsymbol{\overrightarrow{E_O} = 2k\frac{q}{a^2}\vec{\jmath}}$ (0,5 pts)

Exercice 2 : 07 Pts

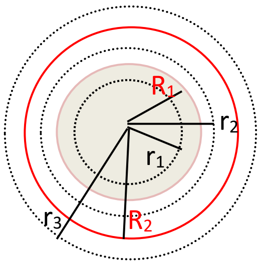
On prend comme surface de Gauss, une sphère de centre O et de rayon r. Par raison de symétrie le champ est radial et constant en tout point de la surface de Gauss. (0,5 pts)

$\emptyset = \oiint \vec{E}.\overrightarrow{ds} = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0}$ (0,5 pts)

$\vec{E} \parallel \overrightarrow{ds}$ Donc :$\oiint \vec{E}.\overrightarrow{ds} = \iint E.ds = E\iint ds = E.S = E4\pi r^2 \Rightarrow \boldsymbol{E4\pi r^2 = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0}}$

$$\Rightarrow \boldsymbol{E = \frac{Q_{int}}{4\pi r^2\varepsilon_0}} \quad (*)$$ (0,5 pts)

Le champ électrostatique E(r) en tout point de l'espace.



Nous avons 3 cas

1er cas r<R₁ ($r \in [0, R_1[$ (01 pt)

$dq = \rho dv = \rho 4\pi r^2 dr$ avec $\rho = \frac{A}{r}$ donc $dq = 4A\pi\, rdr$ (0,25 pts)

$\Rightarrow Q_{int} = \iiint \rho dv = 4A\pi \int_0^r rdr$ (0,25 pts)

$\Rightarrow Q_{int} = \frac{4}{2}\pi A r^2$ (0,25 pts) donc $(*) \Rightarrow E_1 = \frac{A\,\frac{4}{2}\pi r^2}{4\pi r^2\varepsilon_0}$ donc $\boldsymbol{E_1 = \frac{A}{2\varepsilon_0}}$ (0,25 pts)

2eme cas $R_1 \le r < R_2$ ($r \in [R_1, R_2[$ (01 pt)

$dq = \rho dv = 4\pi rdr \Rightarrow Q_{int} = \iiint \rho dv = 4A\pi \int_0^{R_1} r\,dr$ donc $Q_{int} = \frac{4}{2}\pi A R_1^2$ (0,5 pts)

$(*) \Rightarrow E_2 = \frac{A\ 2\pi R_1^2}{4\pi r^2\varepsilon_0}$ donc $\boldsymbol{E_2 = \frac{A\ R_1^2}{2\varepsilon_0 r^2}}$ (0,5 pts)

3eme cas $r \ge R_2$ ($r \in [R_2, +\infty[$) (01 pts)

$Q_{int} = Q_1 + Q_2$ (0,25 pts)avec $Q_1 = 2A\pi R_1^2$ et $dq_2 = \sigma ds \Rightarrow Q_2 = \sigma 4\pi R_2^2$ (0,25 pts)

Donc $Q_{int} = 2A\pi R_1^2 + \sigma 4\pi R_2^2$ (0,25 pts) donc $(*) \Rightarrow E_3 = \frac{2A\pi R_1^2 + \sigma 4\pi R_2^2}{4\pi r^2\varepsilon_0}$

donc $\boldsymbol{E_3 = \frac{A\ R_1^2}{2\varepsilon_0 r^2} + \frac{\sigma R_2^2}{\varepsilon_0 r^2}}$ (0,25 pts)

1- Le potentiel électrique v(r) en tout point de l'espace.

$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}v \Rightarrow E = -\frac{dv}{dr}$ donc $v = -\int Edr$ (0,5 pts)

1er cas : r<R₁ ($r \in [0, R_1[$)

$E_1 = \frac{A}{2\varepsilon_0} \Rightarrow v_1 = -\frac{A}{2\varepsilon_0}\int dr$ donc $\boldsymbol{v_1 = -\frac{A}{2\varepsilon_0}r + C_1}$ (0,25 pts)

2eme cas $R_1 \le r < R_2$ ($r \in [R_1, R_2[$

$E_2 = \frac{A\,R_1^2}{2\varepsilon_0 r^2} \Rightarrow v_2 = -\frac{A\,R_1^2}{2\varepsilon_0}\int \frac{1}{r^2}dr$ donc $\boldsymbol{v_2} = \frac{\boldsymbol{A\,R_1^2}}{\boldsymbol{2\varepsilon_0}}\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{C_2}$ (0,25 pts)

3eme cas r≥R2 ($r \in [R_2, +\infty[$)

$E_3 = \frac{A\,R_1^2}{2\varepsilon_0 r^2} + \frac{\sigma R_2^2}{\varepsilon_0 r^2} \Rightarrow v_3 = -\left(\frac{A\,R_1^2}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma R_2^2}{\varepsilon_0}\right)\int \frac{1}{r^2}dr$ donc $\boldsymbol{v_3} = \left(\frac{\boldsymbol{A\,R_1^2}}{\boldsymbol{2\varepsilon_0}} + \frac{\boldsymbol{\sigma R_2^2}}{\boldsymbol{\varepsilon_0}}\right)\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{C_3}$ (0,25 pts)

Le potentiel à l'infini ($r \rightarrow \infty$) v=0 (0,25 pts) donc $C_3=0$ et $\boldsymbol{v_3} = \left(\frac{\boldsymbol{A\,R_1^2}}{\boldsymbol{2\varepsilon_0}} + \frac{\boldsymbol{\sigma R_2^2}}{\boldsymbol{\varepsilon_0}}\right)\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{r}}$ (0,25 pts)

Le potentiel est une fonction continue :

- *en R2 donc* $\boldsymbol{v_3}(\boldsymbol{R_2}) = \boldsymbol{v_2}(\boldsymbol{R_2})$ (0,25 pts)

$\frac{\boldsymbol{A\,R_1^2}}{\boldsymbol{2\varepsilon_0}}\frac{1}{R_2} + \frac{\sigma R_2^2}{\varepsilon_0}\frac{1}{R_2} = \frac{\boldsymbol{A\,R_1^2}}{\boldsymbol{2\varepsilon_0}}\frac{1}{R_2} + C_2 \Rightarrow C_2 = \frac{\sigma R_2}{\varepsilon_0}$ donc $\boldsymbol{v_2} = \frac{\boldsymbol{A\,R_1^2}}{\boldsymbol{2\varepsilon_0}}\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{r}} + \frac{\boldsymbol{\sigma R_2}}{\boldsymbol{\varepsilon_0}}$ (0,25 pts)

- *en R1 donc* $\boldsymbol{v_2}(\boldsymbol{R_1}) = \boldsymbol{v_1}(\boldsymbol{R_1})$

$-\frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{2\varepsilon_0}}R_1 + C_1 = \frac{\boldsymbol{A\,R_1^2}}{\boldsymbol{2\varepsilon_0}}\frac{1}{R_1} + \frac{\sigma R_2}{\varepsilon_0} \Rightarrow C_1 = \frac{A\,R_1}{2\varepsilon_0} + \frac{A\,R_1}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma R_2}{\varepsilon_0} = \frac{3\rho\,R_1^2}{6\varepsilon_0} + \frac{\sigma R_2}{\varepsilon_0}$

$$C_1 = \frac{A\;R_1}{\varepsilon_0} + \frac{\sigma R_2}{\varepsilon_0}$$

Donc $\boldsymbol{v_1} = -\frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{2\varepsilon_0}}\boldsymbol{r} + \frac{\boldsymbol{A\;R_1}}{\boldsymbol{\varepsilon_0}} + \frac{\boldsymbol{\sigma R_2}}{\boldsymbol{\varepsilon_0}}$ (0,25 pts)

Exercice 3: (03 Pts)

1- la capacité équivalente (0,75 pts)

C_1 *et* C_2 *en paralèlle* $C_{12} = C_1 + C_2$=1+2=3 µF (0,25 pts)

$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_{12}} + \frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_4} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$ (0,25 pts)

Donc C_{eq}=1 µF (0,25 pts)

2- La charge de chaque condensateur (01,25 pts)

$Q_{Ceq}= Q_{C12} = Q_{C3} = Q_{C4}$ (0,25 pts)

$Q_{Ceq}=C_{eq}.\ U = 1.\ 12 = 12$ µC Donc $Q_{C3} = Q_{C4}$=12 µC

C_1 *et* C_2 *en paralèlle* $U_{C12} = U_{C_1} = U_{C_2} \Rightarrow \frac{Q_{C12}}{C_{12}} = \frac{Q_{C1}}{C_1} = \frac{Q_{C2}}{C_2}$ (0,25 pts)

$Q_{Ceq}= Q_{C12}$ =12µC $\Rightarrow \frac{Q_{C12}}{C_{12}} = \frac{12}{3} = 4$ (0,25 pts)

$$\frac{Q_{C1}}{C_1} = 4 \Rightarrow Q_{C1} = 4C_1 = 4\mu C \text{(0,25 pts)}$$

$\frac{Q_{C2}}{C_2} = 4 \Rightarrow Q_{C2} = 4C_2 = 8\mu C$ (0,25 pts)

3- La différence de potentiel aux bornes de chaque condensateur (01 pt)

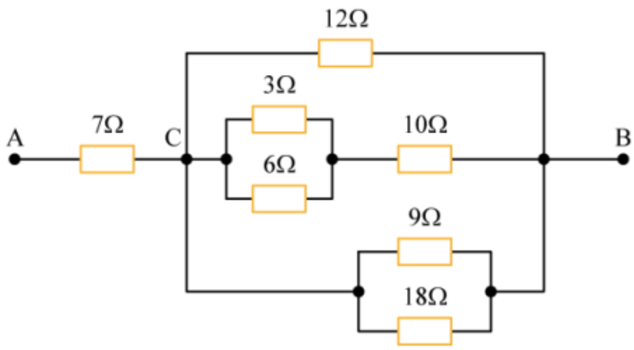
$$Q = C.U \text{ (0,5 pts)} \Rightarrow U = \frac{Q}{C}$$

$$U_{C1} = \frac{Q_{C1}}{C_1} = \frac{4}{1} = 4\,V \quad \text{et} \qquad U_{C2} = \frac{Q_{C2}}{C_2} = \frac{8}{2} = 4V \quad \text{(0,25 pts)}$$

$$U_{C3} = \frac{Q_{C3}}{C_3} = \frac{12}{3} = 4\,V \quad \text{et} \qquad U_{C44} = \frac{Q_{C4}}{C_4} = \frac{12}{3} = 4V \quad \text{(0,25 pts)}$$

Exercice 4: (02 pts)

La résistance équivalente R_{eq}



Les résistances en parallèle

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{18} = \frac{3}{18} \Rightarrow R_1 = \frac{18}{3} = 6\Omega \text{ (0,25 pts)}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} \Rightarrow R_2 = \frac{6}{3} = 2\Omega \text{(0,25 pts)}$$

Les résistances en série

$$R_3 = R_2 + 10 = 12\Omega \text{(0,25 pts)}$$

Ensuite les trois résistances en parallèle $R_1, R_3, 12\Omega$

$$\frac{1}{R_{CB}} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{12} = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{4}{12} \Rightarrow R_1 = \frac{12}{4} = 3\Omega \text{(0,5 pts)}$$

Enfin la résistance équivalente

$$R_{eq} = R_{AB} = R_{AC} + R_{CB} = 7 + 3 = 10\Omega \text{(0,5 pts)}$$