Université Aboubekr Belkaïd Tlemcen *A.U. 2022/2023*
Faculté des Sciences / Département de Mathématiques
L1 mathématiques

Rattrapage d'ANALYSE 2
18 juin 2023
Durée $1h30$
Documents et matériel électroniques interdits

Exercice 1 : [**7.5 pts**]

Soit la fonction

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} ax + b, & \text{si } x \leq 0, \\ \dfrac{1}{1+x}, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

a) Pour quelles valeurs des réels a et b la fonction f est-elle continue dans $\mathbb{R}$?

b) Pour quelles valeurs des réels a et b la fonction f est-elle dérivable dans $\mathbb{R}$?

c) **c**$_1$: Pour ces valeurs trouvées de a et b, vérifier que l'on peut appliquer le Théorème des Accroissements Finis à f dans $[-1, 1]$.

c$_2$: Montrer que la valeur de c correspondante se trouve nécessairement dans $]0, 1[$ et la calculer.

Exercice 2 : [**7.5 pts**]

a) Calculer la dérivée d'ordre n de $(1+x)^{1/2}$ et justifier par récurrence sur n.

b) Donner les $DL_3(0)$ de $\sqrt{1+x}$.

c) **A l'aide des développements limités**, calculer la limite de $\sqrt{x^2+1} - x$ quand $x \to +\infty$.

Exercice 3 : [**5 pts**]

a) Par une double intégration par parties, trouver les primitives de la fonction $f(x) = e^x \cos x$.

b) En déduire l'aire de la région délimitée par la courbe de f, l'axe des x et les droites verticales $x = 0$ et $x = \pi$ (c'est-à-dire le réel $\int_0^\pi e^x \cos x dx$).

Et voilà!

-Populaire-

Corrigé de l'épreuve de rattrapage : Analyse 2

A.U 2022/2023

Exercice 1 :

a) • En dehors de $x=0$, f est continue comme opérations de fonctions continues. (0,5)

• Continuité en 0 : $\lim\limits_{x \to 0^>} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^>} \frac{1}{1+x} = 1$.

f est donc continue en 0 si $f(0)=1 \Leftrightarrow a.0+b=1$ (01)

$\Leftrightarrow$ $\underline{b=1 \text{ et } a \in \mathbb{R}}$.

Cl. f est continue dans $\mathbb{R}$ si $(a,b) \in \mathbb{R}\times\{1\}$.

b) Pour que f soit dérivable dans $\mathbb{R}$, il est nécessaire qu'elle soit d'abord continue. Donc, d'après (a), il s'agit d'étudier la dérivabilité

de $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto f(x) = \begin{cases} ax+1 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{1+x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$

• En dehors de 0, f est dérivable comme opérations de fonctions dérivables. (0,5)

• Dérivabilité en 0 : $\lim\limits_{x \to 0^<} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0^<} \frac{ax+1-1}{x}$

$= \lim\limits_{x \to 0^<} \frac{ax}{x} = \lim\limits_{x \to 0} a = a = f'_-(0)$ (nombre dérivé à gauche (0,+1)

$$\lim_{x \to 0^>} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^>} \frac{\frac{1}{1+x}-1}{x} = \lim_{x \to 0^>} \frac{1-1-x}{(1+x)x}$$

$$= \lim_{x\to 0^>} \frac{-1}{1+x} = -1 = f'_+(0). \quad \left(\begin{array}{c}\text{nombre dérivé} \\ \text{à droite}\end{array}\right)$$ (0,25)

f est dérivable en 0 ssi $f'_-(0) = f'_+(0) \Leftrightarrow \underline{a=-1}$. (0,25)

Conclusion f est dérivable dans $\mathbb{R}$ ssi $\underline{\underline{(a,b)=(-1,1)}}$.

c) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = \begin{cases} -x+1, & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{1+x}, & \text{si } x > 0 \end{cases}$

c1)

→ f est continue dans $\mathbb{R}$, donc aussi en particulier dans $[-1,1]$. (0,50)

→ f est dérivable dans $\mathbb{R}$, donc aussi en particulier dans $]-1,1[$ (0,50)

D'après le théorème des Accroissements Finis,

$\exists\, c \in]-1,1[$ tel que $f(1)-f(-1) = f'(c)(1-(-1))$ (0,25)

$\Leftrightarrow \exists\, c \in]-1,1[$ tel que $\frac{1}{1+1} + (-1) - 1 = f'(c).2$

$\Leftrightarrow \exists\, c \in]-1,1[$ tel que $f'(c) = -\frac{3}{4}$ (0,25)

c2) On constate alors que $c > 0$, car sinon $f'(c) = -1$. (0,25)

D'où $f'(c) = -\frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{-1}{(1+c)^2} = -\frac{3}{4}$, $\underline{c \in]0,1[}$

$\Leftrightarrow (1+c)^2 = \frac{4}{3} \underset{c>0}{\Leftrightarrow} 1+c = \frac{2}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \underline{\underline{c = \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}}}$. (1)

Exercice 2 :

a) On abandonne la question. Difficulté non mesurée par le concepteur du sujet. 2

b) $DL_3(0)$ de $\sqrt{1+x}$.

Soit on connait la formule binomiale

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3$$

$[\alpha \neq -1]$

$$+ \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n-1)}{n!}x^n + x^n.\varepsilon(x) \quad \varepsilon(x) \to 0$$

avec $\alpha = \frac{1}{2}$ et $n = 3$,

Soit on utilise la formule de Taylor-Young d'ordre 3.

o 1ère approche : $(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}x^2$

$$+ \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!}x^3 + x^3.\varepsilon(x) \quad \varepsilon(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

$$\Leftrightarrow (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + x^3.\varepsilon(x)$$ 2

o 2ème approche : $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f(0) = 1$

$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{2}$

$f''(x) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow f''(0) = -\frac{1}{4}$

$f'''(x) = +\frac{3}{8}(1+x)^{-\frac{5}{2}} \Rightarrow f'''(0) = \frac{3}{8}$

Formule de Taylor-Young. $f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2$ 1

$$+ \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + x^3.\varepsilon(x) \quad \varepsilon(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

D'où $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{-\frac{1}{4}}{2!}x^2 + \frac{\frac{3}{8}}{3!}x^3 + x^3\varepsilon(x)$, $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + x^3\varepsilon(x) \qquad \varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$ (1)

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$ est une F.I de type $+\infty-\infty$. (0,5)

On utilise un DL au voisinage de $+\infty$. On se ramène au DL en 0 en posant $X = \frac{1}{x}$ d'où $x \to +\infty \iff X \to 0^+$. (0,5)

$$\sqrt{x^2+1} - x = \sqrt{\frac{1}{X^2}+1} - \frac{1}{X} = \sqrt{\frac{1+X^2}{X^2}} - \frac{1}{X}$$

$$\underset{X>0}{=} \frac{1}{X}\sqrt{1+X^2} - \frac{1}{X} = \frac{1}{X}\left[\sqrt{1+X^2} - 1\right]$$ (0,75)

Or $\sqrt{1+X^2} \underset{Y=X^2}{=} \sqrt{1+Y}$, où $Y \to 0 \iff X \to 0$

$$\underset{(b)}{=} 1 + \frac{1}{2}Y + Y\varepsilon_1(Y), \quad \varepsilon_1(Y) \xrightarrow[Y\to 0]{} 0$$ (un $DL_1(0)$ suffit) (0,75)

$$= 1 + \frac{1}{2}X^2 + X^2\tilde{\varepsilon}(X) \qquad \tilde{\varepsilon}(X) \xrightarrow[X\to 0]{} 0$$

D'où $\sqrt{x^2+1} - x = \frac{1}{X}\left[1 + \frac{1}{2}X^2 - 1 + X^2\tilde{\varepsilon}(X)\right]$

et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) = \lim\limits_{X\to 0^+} \frac{1}{X}\left(\frac{1}{2}X^2\right) = \lim \frac{X}{2} = 0.$ (1)

Exercice 3 :

a) $I(x) = \int f(x)\,dx = \int e^x \cos x\,dx$

Intégrons par parties.

On pose $U(x) = e^x \Rightarrow U'(x) = e^x$ (0,5)

$V'(x) = \cos x \Rightarrow V(x) = \sin x$

D'où $I(x) = U(x)V(x) - \int U'(x).V(x)\,dx$ " $+ C$ " (0,25)

$= e^x.\sin x - \int e^x \sin x\,dx$ " $+ C$ "

Intégrons encore par parties.

$U(x) = e^x \Rightarrow U'(x) = e^x$ (0,5)

$V'(x) = \sin x \Rightarrow V(x) = -\cos x$ (0,25)

D'où $I(x) = e^x.\sin x - \left[-e^x\cos x + \int e^x \cos x\,dx\right]$

$= e^x \sin x + e^x \cos x - I(x) + C,\ C\in\mathbb{R}$

De là $2I(x) = e^x(\sin x + \cos x) + C,\ C\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow \underline{\underline{I(x) = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + C,\ C\in\mathbb{R}.}}$ (1)

b) $\mathcal{A} = \int_0^\pi e^x \cos x\,dx \overset{(a)}{=} \left[\frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x)\right]_0^\pi$

$= \frac{e^\pi}{2}(\sin\pi + \cos\pi) - \frac{e^0}{2}(\sin 0 + \cos 0) = -\frac{e^\pi}{2} - \frac{1}{2}$

$= \underline{\underline{-\frac{e^\pi + 1}{2}\ \text{u.a.}}}$ (1,5)

N.B : On pourrait aussi poser $\begin{cases} U = \cos x \\ V' = e^x \end{cases}$, [illegible]