Université Abou Bekr Belkaid - Tlemcen
Faculté des sciences
Département de mathématiques

Année universitaire: 2022 - 2023
Module: Algèbre 2
L1 Math

Examen de rattrapage

Exercice 1 (11 pts)

On considère l'endomorphisme $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tel que :

$$f(i) = i + 2j \text{ et } f(j) = 2i + j$$

où $B = \{i, j\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$

(1) Déterminer la matrice A associée à l'endomorphisme f relativement à la base canonique B.

(2) Soit $C = \{e_1, e_2\}$ une autre base de $\mathbb{R}^2$ où

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(i + j) \text{ et } e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-i + j)$$

-Déterminer la matrice de passage $P = P_{B-C}$ de la base canonique B à la base C.

(3) Exprimer i et j en fonction de e_1 et e_2. En déduire la matrice de passage $Q = P_{C-B}$.

(4) Vérifier que $P^{-1} = Q$.

(5) Exprimer $f(e_1)$ et $f(e_2)$ en fonction de e_1 et e_2. En déduire la matrice A' associée à l'endomorphisme f relativement à la base C.

(6) Vérifier que $A' = P^{-1}.A.P$ et exprimer A en fonction de A', P et P^{-1}.

Exercice 2 (9 pts)

(1) Déterminer la matrice carrée A d'ordre 3 définie par :

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3} \text{ où } a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{si } i = j \end{cases}$$

(2) Calculer $\det(A)$ et en déduire que la matrice A est inversible.

(3) On considère le système (S) suivant :

$$(S) \begin{cases} -x + y + z = 1 \\ x - y + z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

(i) Ecrire le système (S) sous la forme matricielle $(DX = B)$.

(ii) Calculer $A.D$ et $D.A$. En déduire que D est inversible et déterminer D^{-1}.

(iii) Résoudre le système (S).

BON COURAGE

Université de Tlemcen
Faculté des sciences
Département de mathématiques

A.U 2022-2023
L1 Math
Algèbre 2

Corrigé de l'examen de rattrapage

Exercice (1)

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, endomorphisme, $B = \{i, j\}$ base canonique de $\mathbb{R}^2$

$f(i) = i + 2j$, $f(j) = 2i + j$.

(1) $A = M_f(B)$, la matrice associée à f relativement à la base canonique B

On a : $f(i) = i + 2j = \boxed{1}\, i + \boxed{2}\, j$, $f(j) = \boxed{2}\, i + \boxed{1}\, j$

d'où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. $\longrightarrow$ 1

(2) $C = \{e_1, e_2\}$ autre base de $\mathbb{R}^2$: $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(i+j)$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-i+j)$

$P = P_{B \to C}$ la matrice de passage de la base canonique B à la base C.

On a : $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(i+j) = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}}\, i + \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}}\, j$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-i+j) = \boxed{-\frac{1}{\sqrt{2}}}\, i + \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}}\, j$

d'où $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. $\longrightarrow$ 1

(3) On a $\begin{cases} e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(i+j) \\ e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-i+j) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i + j = \sqrt{2}\, e_1 & (i) \\ -i + j = \sqrt{2}\, e_2 & (ii) \end{cases}$

$(i) - (ii)$: $2i = \sqrt{2}(e_1 - e_2)$ $\Rightarrow \begin{cases} i = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_2) \\ j = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2) \end{cases}$ $\longrightarrow$ 2

$(i) + (ii)$: $2j = \sqrt{2}(e_1 + e_2)$ $\Rightarrow$

$i = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_2) = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}}\, e_1 + \boxed{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}\, e_2$

$j = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2) = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}}\, e_1 + \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}}\, e_2$.

d'où $Q = P_{C \to B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\longrightarrow$ (1)

(4) On a $P \cdot Q = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right] \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right]$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+1 & 1-1 \\ 1-1 & 1+1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow P \cdot Q = I_2$

de même $Q \cdot P = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = I_2$

$P \cdot Q = Q\, P = I_2 \Rightarrow P$ est inversible et $P^{-1} = Q$. $\longrightarrow$ (1)

(5) $\begin{cases} f(e_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}[f(i) + f(j)] = \frac{1}{\sqrt{2}}[i + 2j + 2i + j] = \frac{3}{\sqrt{2}}(i + j) \\ f(e_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}[-f(i) + f(j)] = \frac{1}{\sqrt{2}}[-i - 2j + 2i + j] = \frac{1}{\sqrt{2}}(i - j) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} f(e_1) = \frac{3}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_2) + \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2)\right] = \frac{3}{2}(2e_1) = 3e_1 \\ f(e_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_2) - \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2)\right] = \frac{1}{2}(-2e_2) = -e_2 \end{cases}$ $\longrightarrow$ (2)

$\Rightarrow \begin{cases} f(e_1) = 3e_1 = \boxed{3}\, e_1 + \boxed{0}\, e_2 \\ f(e_2) = -e_2 = \boxed{0}\, e_1 + \boxed{(-1)}\, e_2 \end{cases}$

d'où $A' = M_f(C) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\longrightarrow$ (1)

(6) On a $P^{-1} \cdot A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$P^{-1} \cdot A \cdot P = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

d'où $A' = P^{-1} \cdot A \cdot P$ $\longrightarrow$ (1)

$$A' = P^{-1}\cdot A\cdot P \Rightarrow P\cdot A' = P\cdot P^{-1}\cdot A\cdot P$$
$$\Rightarrow PA' = I\cdot AP = AP$$
$$\Rightarrow P\cdot A'\cdot P^{-1} = A\cdot P\cdot P^{-1}$$
$$\Rightarrow P\cdot A'\cdot P^{-1} = A\cdot I$$
$$\Rightarrow \boxed{A = P\cdot A'\cdot P^{-1}} \rightarrow 0{,}5$$

Exercice 2

① $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le 3}$, $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i\neq j \\ 0 & \text{si } i=j \end{cases}$, $a_{11}=a_{22}=a_{33}=0$
$a_{12}=a_{13}=a_{21}=a_{23}=a_{31}=a_{32}=1$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow 2$$

② $\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$
$= 0 - (-1) + 1 = 2 = \det(A) \rightarrow 1{,}5$

$\det(A) = 2 \neq 0 \Rightarrow A$ est inversible. $\rightarrow 0{,}5$

③ (S) $\begin{cases} -x+y+z=1 \\ x-y+z=1 \\ x+y-z=1 \end{cases}$

(i) (S) $\Leftrightarrow DX = B$ où :
$$D = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow 1$$

(ii) $$A\cdot D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$A\cdot D = 2I_3 \rightarrow 0{,}5$$

$$D\cdot A=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$D\cdot A = 2\,I_3 \longrightarrow$ 0,5

On a $AD = DA = 2I_3 \Longrightarrow \left(\frac{1}{2}A\right)\cdot D = D\left(\frac{1}{2}A\right) = I_3$

$\Longrightarrow$ D est inversible et $\boxed{D^{-1}=\frac{1}{2}A}$ $\longrightarrow$ 1

(iii) $(S) \Longleftrightarrow DX = B$

On a $D^{-1} = \frac{1}{2}A$.

$DX = B \Longrightarrow D^{-1}\cdot D\cdot X = D^{-1}\cdot B$

$\Longrightarrow I_3 X = D^{-1}\cdot B$

$\Longrightarrow X = \frac{1}{2}A\cdot B \longrightarrow$ 0,5

$\longrightarrow$ 1

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases}x=1\\y=1\\z=1\end{cases} \longrightarrow 0{,}5$$

<u>Remarque:</u>

On peut résoudre (S) par la méthode de Cramer.