Université de Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
1ère Année LMD ---Math et M.I—
Année Universitaire 2022 / 2023

Examen de remplacement de l'Epreuve Finale-- de Statistique

Exercice 1 : **(3 Pts)**

A partir de la série statistique suivante :

4 13 4 13 17 7 15 7 13 9 6 7 1 3 19 14 1 11 11 11 20 16 15 11 6 11

Calculer : a) Le Mode **(1 Pt)** ; b) La médiane **(1 Pt)** ; c) La moyenne **(1 Pt)**

Exercice 2 : **(Question de cours)** **(4 Pts)**

Une entreprise nationale emploie 1000 travailleurs (Ouvriers + Cadres). On note S le caractère discret égal au salaire d'un travailleur de cette entreprise. Le salaire moyen d'un ouvrier (qu'on note $\overline{s_o}$) est de 30000 Da et le salaire moyen d'un cadre (qu'on note $\overline{s_c}$) est de 70000 Da. On note $\overline{s_t}$, le salaire moyen d'un travailleur.Calculer le pourcentage des cadres de cette entreprise sachant que $\overline{s_t} = 58000$ Da .

Exercice 3 : **(7 Pts)**

Les valeurs prises par le caractère continu Yet réparties en classes avec leurs effectifs partiels respectifs, sont données par le tableau suivant :

Classe	[1 ;3[	[3 ;5[	[5 ;7[	[7 ;9[
n_i	m	16	k	10

1) Sachant que $\bar{y} = 4.96$ et $Q_1 = 3,3125$.Calculer la valeur de m et k**(2 Pts)** + **(2 Pts)**

2)En déduire la valeur de Mo**(1 Pt)**

3) Déterminer la fonction de répartitionF_Y et tracer son graphe. **(2 Pts)**

Exercice 4 : **(6 Pts)**

Un couple (Z,T) de caractères, est définie sur une population Ω . Les valeurs prises par le couple sont données par le tableau suivant :

ω_i	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
$Z(\omega_i)$	5	6	9	12	18
$T(\omega_i)$	27	32	31	40	65

1) Calculer $a = \frac{Cov(Z,T)}{Cov(Z)}$ et $b = \bar{t}$ - a $\bar{z}$**(1,5 Pts)** + **(1,5 Pts)**

2) Monter que la droite d'équation $y = a\,x + b$ passe par le point $(\bar{z}, \bar{t}\,)$ **(1 Pt)**

3) Calculer le coefficient de corrélation linéaire $\rho_{Z,T}$**(2 Pts)**

NB : (Important pour la notation)

Toutes vos réponses doivent être argumentées et justifiées

Corrigé succint de
– l'examen de remplacement de l'E.F de Statistique –

Exercice 1 : (3 pts)

a) On remarque que $M_0 = 11$ (car 11 se répète le plus (5 fois)). 1pt

b) Classons les modalités par ordre croissant avec leurs répétitions : 1 ; 1 ; 3 ; 4 ; 4 ; 6 ; 6 ; 7 ; 7 ; 7 ; 9 ; 11 ; 11 ; 11 ; 11 ; 11 ; 13 ; 13 ; 13 ; 14 ; 15 ; 15 ; 16 ; 17 ; 19 ; 20.

Comme $N = 26 = 2 \times 13$; alors (d'après le cours)

$$Me = \frac{x_{(13)} + x_{(14)}}{2} = \frac{11+11}{2} = 11 \quad 1pt$$

c) La moyenne est notée $\bar{x}$:

$$\bar{x} = \frac{1}{26}\left(4 + 13 + \cdots + 6 \times 11\right) = \frac{265}{26} = 10,192$$

1pt

Exercice 2 : Questions de cours (4 pts)

Soit n_1 = nombre de cadres et n_2 = nombre d'ouvriers

par hypothèses : $n_1 + n_2 = 1000$

Soit $s_1, \ldots, s_{n_1}$ les salaires des cadres.

et $s_{n_1+1}, \ldots, s_{n_1+n_2}$ les salaires des ouvriers

$$\bar{s}_c = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} s_i \quad \text{et} \quad \bar{s}_o = \frac{1}{n_2} \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} s_i$$

$$\text{et } \bar{s}_t = \frac{1}{1000}\sum_{i=1}^{1000} s_i = \frac{1}{1000}\sum_{i=1}^{u_1} s_i + \sum_{i=u_1+1}^{1000} s_i$$

$$\Rightarrow \bar{s}_t = \frac{1}{1000} \cdot u_1 \left(\frac{1}{u_1}\sum_{i=1}^{u_1} s_i\right) + \frac{1}{1000} u_2 \left(\frac{1}{u_2}\sum_{i=u_1+1}^{u_1+u_2} s_i\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{s}_t = \frac{u_1}{1000}\bar{s}_c + \frac{u_2}{1000}\bar{s}_0}$$ 2pts

$$\text{or } \bar{s}_t = \frac{u_1}{1000}\bar{s}_c + \frac{1000-u_1}{1000}\bar{s}_0$$

$$\Rightarrow \bar{s}_t = \frac{u_1}{1000}(\bar{s}_c - \bar{s}_0) + \bar{s}_0$$ 1pt

Comme $\bar{s}_t = 58000\,Da$; $\bar{s}_c = 70.000\,Da$ et $\bar{s}_0 = 30.000$

$$\Rightarrow 58 = \frac{u_1}{1000}(40) + 30$$

$$\Rightarrow 28 = \frac{u_1}{1000}(40) \Rightarrow \frac{u_1}{1000} = 0,70$$

Ainsi il y a 70% des Cadres dans cette entreprise 2pts

*

Exercice 3 (7pts)

1) on sait que $N = 26 + n + k$ et que

$$\bar{y} = \left(\frac{n}{N}\times 2\right) + \left(\frac{16}{N}\times 4\right) + \left(\frac{k}{N}\times 6\right) + \left(\frac{10\times 8}{N}\right)$$

$$\bar{y} = \frac{2n + 64 + 6k + 80}{N} = 4,96$$

$\Rightarrow 2m + 6k + 144 = 4{,}96\,(26 + m + k)$

$\Rightarrow \boxed{2{,}96\,m - 1{,}04\,k = 15{,}04}$ (1)

Par ailleurs $Q_1 = 3{,}3125 \Rightarrow Q_1 \in [3{,}5[$

d'où $Q_1 = 3 + 2\,\dfrac{0{,}25N - m}{16} = 3{,}3125$

$\Rightarrow 2{,}5 = 6{,}5 - 0{,}75m + 0{,}25k$

$\Rightarrow 0{,}75m - 0{,}25k = 4$

$\Rightarrow \boxed{3m - k = 16}$ (2)

d'où le système

$$\begin{cases} 2{,}96\,m - 1{,}04\,k = 15{,}04 \\ 3m - k = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2{,}96m - 1{,}04k = 15{,}04 \\ -3{,}12m + 1{,}04 = 16{,}64 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 10 \\ k = 14 \end{cases}$$

4 pts

Exercice 4 (6 pts)

1) calculons d'abord $\bar{z}$ et $cov(Z,T)$. et $Var(Z)$

$\bar{z} = \frac{1}{5}(5+6+9+12+18) = \frac{50}{5} = 10$

$\boxed{\bar{z} = 10}$

III /6

$\bar{t} = \frac{1}{5}(27+32+31+40+25) = \frac{195}{5} = 39$

$\boxed{\bar{t} = 39}$

$Var(Z) = \frac{1}{5}(25+36+81+144+324) - (10)^2$

$Var(Z) = 122 - 100 = 22 \Rightarrow \sigma_Z = 4{,}69$

$\boxed{Var(Z) = 22 \text{ et } \sigma_Z = 4{,}69}$

3) $a = \frac{Cov(Z,T)}{Var(Z)}$

$Cov(Z,T) = \frac{1}{5}(135+192+279+480+1170) - (390)$

$= 451{,}12 - 390 \Rightarrow \boxed{Cov(Z,T) = 61{,}2}$

Ainsi $a = \frac{61{,}2}{22} \Rightarrow \boxed{a = 2{,}78}$ 1,5pt

et $b = (39) - (2{,}78 \times 10) \Rightarrow \boxed{b = 11{,}2}$ 1,5pt

2) $y = ax + b \Rightarrow$

$y = 2{,}78x + 11{,}2$

Pour $x = \bar{z}$: $y = 2{,}78 \times 10 + 11{,}2$

$\Rightarrow y = 39 = \bar{t}$ 1pt

IV /6

3) $\rho_{Z,T} = \dfrac{\mathrm{cov}(Z,T)}{\sigma_Z \cdot \sigma_T}$

or $\sigma_T = \sqrt{\frac{1}{5}(729 + 1024 + 961 + 1600 + 4225) - (1521)}$

$\Rightarrow \sigma_T = \sqrt{1707{,}8 - 1521} = \sqrt{186{,}8} = 13{,}66$

$\boxed{\sigma_T = 13{,}66}$

$\Rightarrow \rho(Z,T) = \dfrac{61{,}2}{4{,}69 \times 13{,}66} = \dfrac{61{,}2}{64{,}06}$

$\Rightarrow \boxed{\rho_{Z,T} = 0{,}955}$

2pts

VI/6

(*) comme $n = 10$; et $k = 14$

on a le tableau

Classe	[1;3[	[3;5[	[5;7[	[7;9[
n_i	10	16	14	10
f_i	0,20	0,32	0,28	0,20
F_i	0,20	0,52	0,80	1,00

$\sum n_i = 50$

Ainsi $M_o = 3 + 2 \dfrac{(0,32-0,20)}{(0,32-0,20)+(0,32-0,28)}$ ($M_o \in [3;5[$)

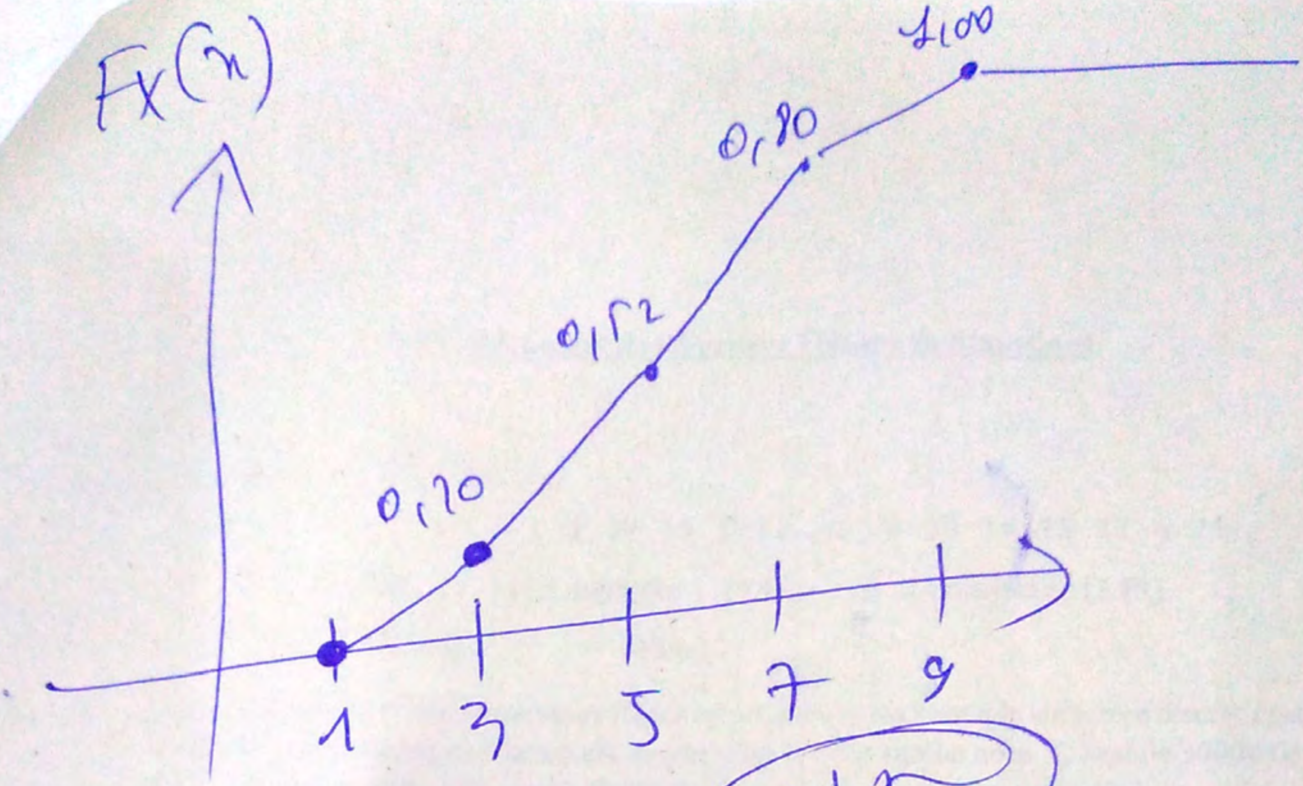
$$\Rightarrow M_o = 3 + 2 \frac{0,12}{0,12+0,04} = 4,5$$

$$\boxed{M_o = 4,5}$$

1 pt

3) $F_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 1 \\ \frac{0,20}{2}(x-1) \text{ si } 1 \leq x < 3 \\ 0,20 + \frac{0,32}{2}(x-3) \text{ si } 3 \leq x < 5 \\ 0,52 + \frac{0,28}{2}(x-5) \text{ si } 5 \leq x < 7 \\ 0,80 + \frac{0,20}{2}(x-7) \text{ si } x \leq 7 < 9 \\ 1 \text{ si } x \geq 7 \end{cases}$

1 pt



1pt