Université Aboubekr Belkaïd Tlemcen *A.U. 2022/2023*
Faculté des Sciences / Département de Mathématiques
L1 mathématiques

Final d'ANALYSE 2
28 mai 2023
Durée $1h30$

Documents et matériel électroniques interdits

Exercice 1 : [**5.5 pts**]

a) Soit la fonction

$$\arg sh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto y = \arg shx \Leftrightarrow shy = x.$$

Démontrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, (\arg shx)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

b) Soit (C) la courbe d'équation $y = \arg shx - \alpha x + \beta x^2$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.

b_1) Donner l'équation de la droite tangente (T) de (C) en $(0,0)$.

b_2) Etudier la position relative de (C) et (T) au voisinage de $(0,0)$ selon les valeurs de α et β.

Exercice 2 : [**5.5 pts**]

a) Rappeler le $DL_3(0)$ de $\sin x$ et $\cos x$ (sans nécessairement les calculer).

b) Calculer, sans utiliser la formule de Taylor, le $DL_3(2)$ de $\sin x$.

c) En déduire

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ \neq}} \frac{\sin x - \sin 2}{x^2 - 4}.$$

Exercice 3 : [**5 pts**]

a) Trouver les valeurs des constantes réelles a et b telles que

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{a}{\sqrt{x^2-1}} + \frac{\sqrt{x^2-1}}{b}.$$

b) En déduire l'aire algébrique de la région délimitée par la courbe de la fonction $y = \dfrac{2x^3}{\sqrt{x^2-1}}$, l'axe des x et les droites verticales $x=\sqrt{2}$ et $x = 2$.

Exercice 4 : [**4 pts**]

Soit f une fonction continue dans $\mathbb{R}$ et F une primitive de f.

Résoudre l'équation différentielle suivante d'inconnue $y(x)$:

$$(E) \quad y' - \sqrt{1-y^2}\, f(x) = 0.$$

"Celui qui peut, agit. Celui qui ne peut pas, donne des leçons".

-George Bernard Shaw-

Université Aboubekr Belkaïd Tlemcen *A.U. 2022/2023*
Faculté des Sciences / Département de Mathématiques
L1 mathématiques

Corrigé du Final d'ANALYSE 2
du *28 mai 2023*

Exercice 1 : ["**5.5**" **pts**]

a) Soit la fonction

$$\begin{aligned} \arg sh :\ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto y = \arg sh x \Leftrightarrow sh y = x. \end{aligned}$$

Démontrer que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (\arg sh x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

b) Soit (C) la courbe d'équation $y = \arg sh x - \alpha x + \beta x^2$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.

b_1) Donner l'équation de la droite tangente (T) de (C) en $(0,0)$.

b_2) Etudier la position relative de (C) et (T) au voisinage de $(0,0)$ selon les valeurs de α et β.

REP :

a) D'après le théorème de dérivabilité des fonctions réciproques, on a

$$(\arg sh x)' = \frac{1}{(sh y)'} = \frac{1}{ch y}.$$

Or pour tout $y \in \mathbb{R}$, $ch^2 y - sh^2 y = 1$ et $ch y \geq 1$, d'où $ch y = \sqrt{1 + sh^2 y}$.

De là,

$$\begin{aligned} (\arg sh x)' &= \frac{1}{\sqrt{1+sh^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 + sh^2(\arg sh x)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \end{aligned}$$

car $sh(\arg sh x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. *1.5*

Autrement, on peut se souvenir que $\arg sh x = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ et obtenir le résultat demandé en dérivant cette expression.

b) Soit (C) la courbe d'équation $y = \arg sh x - \alpha x + \beta x^2$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.

b_1) Pour déterminer l'équation de la tangente au point $(0,0)$ de la courbe (C), on peut utiliser la formule

$$y(x) = y'(0)(x-0) + y(0).$$

Remarque : comme nous allons devoir dans la question suivante étudier les positions relatives de la courbe et de sa tangente à l'origine, on peut aussi déterminer l'équation de la tangente en écrivant le développement limité d'ordre 2 en 0 de la fonction de (C).

Calculons $y'(0)$. D'après la qustion (**a**),

$$y'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \alpha + 2\beta x,$$
$$\Rightarrow y'(0) = 1 - \alpha.$$

Sachant que $\arg sh 0 = 0$, l'équation de la tangente (T) à (C) en $(0,0)$ est donc donnée par :

$$y = (1-\alpha)(x-0) + 0$$
$$\Leftrightarrow y = (1-\alpha)x. \qquad (T)$$

0.5

b_2) Cherchons le $DL_2(0)$ de la fonction de (C). Comme elle est somme de $\arg shx$ et du polynôme $-\alpha x + \beta x^2$, il suffit de chercher le $DL_2(0)$ de $f(x) := \arg shx$ par la formule de Taylor-MacLaurin-Young

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + x^2\varepsilon(x),\ \varepsilon(x) \to 0 \text{ quand } x \to 0.$$

on :

$$f(x) = \arg shx \Rightarrow f(0) = 0,$$
$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(0) = 1,$$
$$f''(x) = -\tfrac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}2x \Rightarrow f'(0) = 0,$$

d'où

$$\arg shx = 0 + x + 0x^2 + x^2\varepsilon(x),\ \varepsilon(x) \to 0 \text{ quand } x \to 0,$$
$$= x + x^2\varepsilon(x),\ \varepsilon(x) \to 0 \text{ quand } x \to 0.$$

1.5

Ainsi

$$y = x + x^2\varepsilon(x) - \alpha x + \beta x^2 = (1-\alpha)x + \beta x^2 + x^2\varepsilon(x),\ \varepsilon(x) \to 0 \text{ quand } x \to 0.$$

0.5

Noter que la partie encadrée fournit directement l'équation de la tangente (T).

Pour étudier la position relative de (C) et (T) à l'origine, on doit discuter le signe de la différence

$$y - (1-\alpha)x = \beta x^2 + x^2\varepsilon(x),\ \varepsilon(x) \to 0 \text{ quand } x \to 0,$$
$$= x^2(\beta + \varepsilon(x)),\ \varepsilon(x) \to 0 \text{ quand } x \to 0.$$

0.5

Comme $x^2 \geq 0$, il suffit de regarder le signe de $\beta + \varepsilon(x)$, $\varepsilon(x) \to 0$ quand $x \to 0$.

- Si $\beta > 0$, $\beta + \varepsilon(x)$ est strictement positive pour x voisin de 0 (ce qui est réalisable sachant que $\varepsilon(x) \to 0$ quand $x \to 0$). Ainsi $y - (1-\alpha)x > 0$ au voisinage de 0 et **la courbe** (C) **est au-dessus de la tangente** (T). *0.75*
- Si $\beta < 0$, $\beta + \varepsilon(x)$ est strictement négative pour x voisin de 0 (ce qui est réalisable sachant que $\varepsilon(x) \to 0$ quand $x \to 0$). Ainsi $y - (1-\alpha)x < 0$ au voisinage de 0 et **la courbe** (C) **est au-dessous de la tangente** (T). *0.75*

(Noter que par hypothèse $\beta \neq 0$.)

Exercice 2 : [**5.5 pts**]

a) Rappeler le $DL_3(0)$ de $\sin x$ et $\cos x$ (sans nécessairement les calculer).

b) Calculer, sans utiliser la formule de Taylor, le $DL_3(2)$ de $\sin x$.

c) En déduire

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ \neq}} \frac{\sin x - \sin 2}{x^2-4}.$$

REP :

a) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon_1(x), \lim_{x\to 0} \varepsilon_1(x) \to 0.$ *1*

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + x^3\varepsilon_2(x), \lim_{x\to 0} \varepsilon_2(x) \to 0.$ *1*

b) Il s'agit de ne pas utiliser la formule de Taylor mais d'utiliser les DL de la question précédente.

On pose $t = x-2$, d'où $x = 2+t$. Ainsi $x \to 2 \Leftrightarrow t \to 0$. *0.5*

$$\sin x = \sin(2+t) = \sin 2\cos t + \sin t \cos 2 \quad \textit{0.5}$$
$$\overset{(a)}{=} \sin 2[1 - \frac{t^2}{2!} + t^3\varepsilon_2(t)] + [t - \frac{t^3}{3!} + t^3\varepsilon_1(t)]\cos 2,$$

avec $\lim_{t\to 0} \varepsilon_1(t) \to 0$ et $\lim_{t\to 0} \varepsilon_2(t) \to 0$.

En réarrangeant la partie régulière et en remplaçant t par $x-2$, on obtient le$DL_3(2)$ de $sinx$:

$$\sin x = \sin 2 + \cos 2.(x-2) - \frac{\sin 2}{2}(x-2)^2 - \frac{\cos 2}{6}(x-2)^3 + (x-2)^3\varepsilon(x), \quad \lim_{x\to 2} \varepsilon(x) \to 0.$$

1

c) Notons d'abord que la limite demandée est une forme indéterminée "$\frac{0}{0}$". Il s'agit de montrer que l'on sait déduire de ce qui précède cette limite et non pas de la calculer d'une toute autre manière!

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ \neq}} \frac{\sin x - \sin 2}{x^2-4} \overset{(b)}{=} \lim_{\substack{x\to 2\\ \neq}} \frac{[\sin 2 + \cos 2.(x-2) - \frac{\sin 2}{2}(x-2)^2 - \frac{\cos 2}{6}(x-2)^3] - \sin 2}{(x-2)(x+2)}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 2\\ \neq}} \frac{\cos 2.(x-2) - \frac{\sin 2}{2}(x-2)^2 - \frac{\cos 2}{6}(x-2)^3}{(x-2)(x+2)} = \lim_{\substack{x\to 2\\ \neq}} \frac{\cos 2 - \frac{\sin 2}{2}(x-2) - \frac{\cos 2}{6}(x-2)^2}{x+2}$$

$$= \frac{\cos 2}{4}.$$

1.5

Rem1: on aurait bien sûr pu calculer cette limite avec seulement un $DL_1(2)$.

Rem2 : on avait le droit de ne pas écrire les restes dans le calcul précédent car on a fait suivre les expressions du symbole $\lim_{\substack{x\to 2\\ \neq}}$. Si vous choisissez de transformer votre fraction avant de passer à la limite, il est incorrect de ne pas écrire les restes des DL.

Exercice 3 : [**5 pts**]

a) Trouver les valeurs des constantes réelles a et b telles que

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{a}{\sqrt{x^2-1}} + \frac{\sqrt{x^2-1}}{b}.$$

b) En déduire l'aire algébrique de la région délimitée par la courbe de la fonction $y = \dfrac{2x^3}{\sqrt{x^2-1}}$, l'axe des x et les droites verticales $x = \sqrt{2}$ et $x = 2$.

REP :

a) Pour tout $x \in \mathrm{R}\backslash[-1,+1]$,

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{a}{\sqrt{x^2-1}} + \frac{\sqrt{x^2-1}}{b}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{ab+x^2-1}{b\sqrt{x^2-1}}.$$

Par identification on obtient $b = 1$ et $ab - 1 = 0$, d'où $(a,b) = (1,1)$.

Ainsi,

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} + \sqrt{x^2-1}.$$

2

b) Il s'agit donc de calculer l'intégrale définie $\mathbf{A} = \displaystyle\int_2^{\sqrt{2}} \frac{2x^3}{\sqrt{x^2-1}}dx$. Or

$$\mathbf{A} = \int_2^{\sqrt{2}} \frac{2x^3}{\sqrt{x^2-1}}dx = \int_2^{\sqrt{2}} 2x\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}dx$$

$$\overset{(a)}{=} \int_2^{\sqrt{2}} 2x\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} + \sqrt{x^2-1}\right)dx \quad 0.5$$

$$= \int_2^{\sqrt{2}} \frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}dx + \int_2^{\sqrt{2}} 2x\sqrt{x^2-1}\,dx$$

$$= 2\int_2^{\sqrt{2}} \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}dx + \int_2^{\sqrt{2}} 2x(x^2-1)^{\frac{1}{2}}dx$$

$$= \left[2\sqrt{x^2-1}\right]_2^{\sqrt{2}} + \left[\frac{(x^2-1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_2^{\sqrt{2}}$$

$$= \left[2\sqrt{x^2-1}\right]_2^{\sqrt{2}} + \frac{2}{3}\left[(x^2-1)^{\frac{3}{2}}\right]_2^{\sqrt{2}} \quad 1.5$$

$$= (\ldots) = 4\sqrt{3} - \frac{8}{3}\ \textit{unités d'aire}. \quad 1$$

Exercice 4 : [**4 pts**]

Soit f une fonction continue dans R et F une primitive de f.

Résoudre l'équation différentielle suivante d'inconnue $y(x)$:

$$(E) \quad y' - \sqrt{1-y^2}\, f(x) = 0.$$

REP :

On montre que c'est une équation à variables séparables. En effet,

$$y' - \sqrt{1-y^2}\, f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \sqrt{1-y^2}\, f(x)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = f(x)dx, \text{ avec } y \neq \pm 1.$$

0.25+0.75

Intégrons les deux membres de cette égalité :

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int f(x)dx$$

$$\Leftrightarrow \arcsin y = F(x) + C,\ C \in \mathrm{R}, \qquad 1$$

$$\Leftrightarrow \sin(\arcsin y) = \sin(F(x) + C),\ C \in \mathrm{R},$$

$$\Leftrightarrow y(x) = \sin(F(x) + C),\ C \in \mathrm{R} \text{ (solution générale de } (E)). \qquad 1$$

De plus, les fonctions constantes $y(x) \equiv -1$ et $y(x) \equiv +1$ sont deux solutions évidentes de (E), d'où l'ensemble des solutions de l'EDO (E) est donné par

$$S = \{y(x) = -1,\ y(x) = +1,\ y(x) = \sin(F(x) + C),\ C \in \mathrm{R}\}.$$

1

Rem : on dit que la solution générale est incomplète. En effet, pour aucune valeur de C on ne retrouve les solutions triviales 1 et -1.

"Celui qui peut, agit. Celui qui ne peut pas, donne des leçons".

-George Bernard Shaw-