Université Abou Bekr Belkaid - Tlemcen
Faculté des sciences
Département de mathématiques

Année universitaire: 2022 - 2023
Module: Algèbre 2
L1 Math

Epreuve Finale

Exercice 1 (12 pts)

(*I*) On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par :

$$f(x,y,z) \mapsto (x-y, y+z)$$

(1) Montrer que f est une application linéaire.

(2) Montrer que $\ker(f)$ est un $s.e.v$ de $\mathbb{R}^3$.

(3) Déterminer $\dim(Ker(f))$. f est-elle injective?

(4) En déduire $rg(f)$. f est-elle surjective?

(*II*) Notons par $C_3 = \{e_1, e_2, e_3\}$ et $C_2 = \{i, j\}$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ respectivement. Soient $D_3 = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ et $D_2 = \{i', j'\}$ deux autres bases de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ respectivement, où

$$e'_1 = (1,1,0), e'_2 = (1,0,1), e'_3 = (0,1,1),$$
$$i' = f(e_2) \text{ et } j' = f(e_3)$$

(1) Déterminer la matrice A associée à l'application linéaire f relativement aux bases C_3 et C_2.

(2) Déterminer les matrices $P = P_{C_3 - D_3}$ et $Q = P_{C_2 - D_2}$ les matrices de passage de la base C_3 à la base D_3 et de C_2 à D_2 respectivement.

(3) Donner Q^{-1}. Que représente la matrice Q^{-1} par rapport aux bases C_2 et D_2.

(4) Déterminer la matrice $B = Q^{-1}.A.P$. Que représente la matrice B.

Exercice 2 (8 pts)

On définit les matrices carrées d'ordre 3, M, N et D par :

$$M = (m_{ij})_{1 \le i,j \le 3} \text{ où } m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \ge j \\ 0 & \text{si } i < j \end{cases}$$
$$N = (n_{ij})_{1 \le i,j \le 3} \text{ où } n_{ij} = (-1)^{i+j}$$
$$D = M + N - I_3 \text{ où } I_3 \text{ est la matrice unité d'ordre 3.}$$

(1) Ecrire explicitement les matrices M, N et D.

(2) Montrer que la matrice D est inversible.

(3) On considère le système (S) suivant :

$$(S) \begin{cases} x + y = 2 \\ -2x - y + z = -2 \\ -2x - 2y + z = -3 \end{cases}$$

(*i*) Ecrire le système (S) sous la forme matricielle $(AX = B)$.

(*ii*) Calculer $A.D$ et $D.A$.

(*iii*) Résoudre le système (S).

BON COURAGE

Université de Tlemcen. 2022 2023

Faculté des sciences L1 Math

Département de mathématiques Corrigé de l'épreuve finale Algèbre 2

Exercice ①

I) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z) = (x-y, y+z)$

① f est linéaire : $\begin{cases} \forall u,v \in \mathbb{R}^3 : f(u+v) = f(u)+f(v) \\ \forall u \in \mathbb{R}^3, \forall \alpha \in \mathbb{R} : f(\alpha u) = \alpha f(u). \end{cases}$ → 0,25

. soient $u,v \in \mathbb{R}^3$: $u = (x,y,z)$, $v = (x',y',z')$.

$$f(u+v) = f(\underbrace{x+x'}_{X}, \underbrace{y+y'}_{Y}, \underbrace{z+z'}_{Z}) = f(X,Y,Z) = (X-Y, Y+Z)$$

$$= (x+x'-y-y', y+y'+z+z')$$

$$= ((x-y)+(x'-y'), (y+z)+(y'+z'))$$

$$= (x-y, y+z) + (x'-y', y'+z')$$

$$= f(x,y,z) + f(x',y',z')$$

$f(u+v) = f(u)+f(v)$ → 0,5

. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$$f(\alpha u) = f(\alpha x, \alpha y, \alpha z) = (\alpha x - \alpha y, \alpha y + \alpha z)$$

$$= \alpha(x-y, y+z) = \alpha f(x,y,z) = \alpha f(u)$$

$f(\alpha u) = \alpha f(u)$. → 0,5

donc f est linéaire.

② $\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}\{0_{\mathbb{R}^2}\} = \{u \in \mathbb{R}^3, f(u) = 0_{\mathbb{R}^2} = (0,0)\}$

$\mathrm{Ker}(f)$ s.e.v de $\mathbb{R}^3$: $\begin{cases} \mathrm{Ker}(f) \neq \emptyset \\ \forall u,v \in \mathrm{Ker}(f), u+v \in \mathrm{Ker}(f) \\ \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u \in \mathrm{Ker}(f), \alpha u \in \mathrm{Ker}(f) \end{cases}$ → 0,25

· On a $f(0_{\mathbb{R}^3}) = 0_{\mathbb{R}^2}$ car f est linéaire $\Rightarrow 0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0) \in \ker(f)$

donc $\ker(f) \neq \emptyset$. $\rightarrow$ 0,5

· Soient $u, v \in \ker(f)$: $f(u) = 0_{\mathbb{R}^2}$, $f(v) = 0_{\mathbb{R}^2}$.

$f(u+v) = f(u) + f(v)$ car f est linéaire.

$= 0_{\mathbb{R}^2} + 0_{\mathbb{R}^2}$ car $u, v \in \ker(f)$ $\rightarrow$ 0,5

$f(u+v) = 0_{\mathbb{R}^2} \Rightarrow u+v \in \ker(f)$.

· Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $u \in \ker(f)$:

On a $f(u) = 0_{\mathbb{R}^2}$ $(u \in \ker(f))$

$f(\alpha u) = \alpha f(u)$ car f est linéaire.

$= \alpha \cdot 0_{\mathbb{R}^2} = 0_{\mathbb{R}^2} \Rightarrow f(\alpha u) = 0_{\mathbb{R}^2}$ $\rightarrow$ 0,5

$\Rightarrow \alpha u \in \ker(f)$

<u>Conclusion</u> : $\ker(f)$ est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$.

③ $\ker(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, f(x,y,z) = (0,0)\}$

Soit $u = (x,y,z) \in \ker(f) \Rightarrow f(x,y,z) = (0,0)$

$\Rightarrow (x-y, y+z) = (0,0)$

$\Rightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$ $\rightarrow$ 0,5

$\Rightarrow \begin{cases} x = y \\ z = -y \end{cases}, y \in \mathbb{R}$

$\ker(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = y, z = -y\} = \{(y,y,-y), y \in \mathbb{R}\}$

$u \in \ker(f) \Rightarrow u = (y,y,-y) = y(1,1,-1)$ $\rightarrow$ 0,5

d'où $\ker(f) = \mathrm{Vect}\{(1,1,-1)\}$ le s.e.v engendré par $(1,1,-1)$

et comme $(1,1,-1) \neq (0,0,0)$ alors $\{(1,1,-1)\}$ est une base de $\ker(f)$

et par suite $\dim \ker(f) = 1$. $\rightarrow$ 0,5

On a $\ker(f) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\} \Rightarrow f$ n'est pas injective. → (0,5)

④ le rang de f. $[rg(f) = \dim \operatorname{Im}(f)]$

D'après le théorème du rang :

$\dim \mathbb{R}^3 = \dim \ker(f) + rg(f)$

$\Rightarrow rg(f) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \ker(f) = 3-1 = 2$

$\Rightarrow rg(f) = \dim \operatorname{Im}(f) = 2$. → (0,5)

et comme $\operatorname{Im}(f)$ est un s.e.v de $\mathbb{R}^2$ et $\dim \mathbb{R}^2 = \dim \operatorname{Im}(f) = 2$

alors $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}^2$ et par suite f est surjective. → (0,5)

II) $C_3 = \{e_1, e_2, e_3\}$ base canonique de $\mathbb{R}^3$

$e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$

$C_2 = \{i, j\}$ base canonique de $\mathbb{R}^2$, $i = (1,0)$, $j = (0,1)$

$D_3 = \{e_1', e_2', e_3'\}$ autre base de $\mathbb{R}^3$

$e_1' = (1,1,0)$, $e_2' = (1,0,1)$, $e_3' = (0,1,1)$

$D_2 = \{i', j'\}$ autre base de $\mathbb{R}^2$, $i' = f(e_2)$, $j' = f(e_3)$

$i' = f(e_2) = f(0,1,0) = (0-1, 1+0) = (-1,1) = i'$

$j' = f(e_3) = f(0,0,1) = (0-0, 0+1) = (0,1) = j'$

① $A = M_f(C_3, C_2)$ la matrice associée à f relativement aux bases C_3 et C_2

$$A = M_f(C_3, C_2) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} & \begin{array}{c} i \\ j \end{array} \end{array}$$

$f(e_1) = f(1,0,0) = (1,0) = 1.(1,0) + 0(0,1) = \boxed{1} i + \boxed{0} j$

$f(e_2) = f(0,1,0) = (-1,1) = -1(1,0) + 1(0,1) = \boxed{-1} i + \boxed{1} j$ → (1,5)

$f(e_3) = f(0,0,1) = (0,1) = 0(1,0) + 1(0,1) = \boxed{0} i + \boxed{1} j$

d'où $A = M_f(C_3, C_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ → (0,5)

② :

$P = \int_{C_3 \hookrightarrow D_3}$ matrice de passage de la base C_3 à D_3

$Q = \int_{C_2 \hookrightarrow D_2}$ matrice de passage de C_2 à D_2

$$P = \int_{C_3 \hookrightarrow D_3} = \begin{array}{cc} \begin{matrix} e_1' & e_2' & e_3' \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix} \end{array} \rightarrow 0{,}25$$

$e_1' = (1,1,0) = 1(1,0,0) + 1(0,1,0) + 0(0,0,1) = \boxed{1} e_1 + \boxed{1} e_2 + \boxed{0} e_3$

$e_2' = (1,0,1) = 1(1,0,0) + 0(0,1,0) + 1(0,0,1) = \boxed{1} e_1 + \boxed{0} e_2 + \boxed{1} e_3$ 0,75

$e_3' = (0,1,1) = 0(1,0,0) + 1(0,1,0) + 1(0,0,1) = \boxed{0} e_1 + \boxed{1} e_2 + \boxed{1} e_3$

$$Q = \int_{C_2 \hookrightarrow D_2} = \begin{array}{cc} \begin{matrix} i' & j' \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} i \\ j \end{matrix} \end{array}$$

$i' = (-1,1) = \boxed{-1} i + \boxed{1} j$

$j' = (0,1) = \boxed{0} i + \boxed{1} j$ 0,75

③ Q^{-1} inverse de Q.

$\det(Q) = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow Q^{-1}$ existe.

$$Q^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 1 & -0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = Q^{-1}. \rightarrow 0{,}75$$

$Q = \int_{C_2 \hookrightarrow D_2}$ la matrice de passage de C_2 à D_2

d- $Q^{-1} = \int_{D_2 \hookrightarrow C_2}$ la matrice de passage de D_2 à C_2. $\rightarrow$ 0,5

④ $B = Q^{-1} . A . P$.

$$Q^{-1} . A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+0 & 1+0 & 0+0 \\ 1+0 & -1+1 & 0+1 \end{pmatrix}$$

$$Q^{-1} . A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow 0{,}5$$

$$(\bar{Q}^{1}.A).P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+1+0 & -1+0+0 & 0+1+0 \\ 1+0+0 & 1+0+1 & 0+0+1 \end{pmatrix}$$

$$B = \bar{Q}^{1}.A.P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to 0{,}5$$

B représente la matrice associée à f relativement aux bases D_3 et D_2. $\to 0{,}5$

$$B = M_f(D_3, D_2).$$

Exercice 2

① $M = (m_{ij})_{1\le i,j\le 3}$, $m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \geqslant j \\ 0 & \text{si } i < j \end{cases}$, $m_{11} = m_{21} = m_{31} = m_{32} = 1$, $m_{22} = m_{33} = 1$, $m_{12} = m_{13} = m_{23} = 0$

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to 1$$

$N = (n_{ij})_{1\le i,j\le 3}$, $n_{ij} = (-1)^{i+j}$, $n_{11} = n_{22} = n_{33} = n_{31} = n_{13} = 1$, $n_{12} = n_{21} = n_{23} = n_{32} = -1$

$$N = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to 1$$

$D = M + N - I_3$ où $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. la matrice unité

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = D \to 1$$

② $\det(D) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$

$= 1 + 2 - 2 = 1 \neq 0 \to 1$

$\det(D) = 1 \neq 0 \Rightarrow D$ est inversible. $\to 0{,}5$

③ $(S)\begin{cases} x+y=2 \\ -2x-y+z=-2 \\ -2x-2y+z=-3 \end{cases}$

ⓘ Ecriture matricielle du système (S).

Posons $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ → 1

$(S) \Leftrightarrow A\cdot X = B.$

ⓘⓘ $A\cdot D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$

$D\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$ 1

$AD = DA = I_3.$

ⓘⓘⓘ Résolution du système (S).

$(S) \Leftrightarrow A\cdot X = B$

d'après ⓘⓘ A est inversible $(AD=DA=I_3)$ et $A^{-1}=D$ → 0,5

$$\begin{aligned} AX = B &\Rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot B \\ &\Rightarrow I_3\cdot X = D\cdot B \\ &\Rightarrow X = D\cdot B \end{aligned}$$ 0,5

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2-3 \\ 0-2+3 \\ 4+0-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$ → 0,5

Remarque : On peut résoudre (S) par la méthode de Cramer.