Université Abou Bekr Belkaid - Tlemcen
Faculté des sciences
Département de mathématiques

Année universitaire 2022 - 2023
Module: Algèbre 2
L1 Math

Contrôle continu (Remplacement)

Exercice 1 (8 pts)

Considérons le polynôme suivant

$$Q(x) = x^3 - x^2 - x + 1.$$

(1) Vérifier que $x_0 = 1$ est une racine double du polynôme Q.

(2) Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ en produit de polynômes irréductibles, le polynôme Q

(3) Déterminer le polynôme P dont le quotient et le reste de sa division euclidienne par Q, sont

$$A(x) = x \text{ et } R(x) = 4 \text{ respectivement}$$

(4) Effectuer la division suivant les puissances croissantes à l'ordre 2 de P par Q.

(5) Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$, la fraction rationnelle suivante

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Exercice 2 (7 pts)

On muni l'ensemble $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ d'une L.C.I $*$ définie par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}\setminus\{-1\},\ x * y = x + y + xy$$

(1) Calculer

$$0 * 1 \text{ et } (-2) * 2$$

(2) Montrer que $(\mathbb{R}\setminus\{-1\}, *)$ est un groupe abélien.

(3) Résoudre dans $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ les équations suivantes :

$$x * 1 = 3 \text{ et } x * x * 1 = 1.$$

(4) On définit l'application

$$f : (\mathbb{R}\setminus\{-1\}, *) \to (\mathbb{R}^*, .) \text{ par : } \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\},\ f(x) = x + 1$$

où $(\mathbb{R}^*, .)$ est le groupe multiplicatif des réels.

(i) Calculer $f(e)$, où e est l'élément neutre pour la loi $*$.

(ii) Montrer que f est un morphisme de groupe.

Exercice 3 (5 pts)

(1) Montrer que le sous ensemble E de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x + y + z = 0\}$$

est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

(2) Le sous ensemble F de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x + y + z = 1\}$$

est-il un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?

Bon courage

Contrôle continu (rattrapage) — L1 Math Algèbre 2

Corrigé

Exercice

$Q(x) = x^3 - x^2 - x + 1$

(1) $x_0 = 1$ racine double de $Q \iff Q(1) = Q'(1) = 0$ et $Q''(1) \neq 0$ (0,25)

$Q(1) = 1 - 1 - 1 + 1 = 0$ (0,25)

$Q'(x) = 3x^2 - 2x - 1 \implies Q'(1) = 3 - 2 - 1 = 0$ (0,25)

$Q''(x) = 6x - 2 \implies Q''(1) = 6 - 2 = 4 \neq 0$ (0,25)

On a $Q(1) = Q'(1) = 0$ et $Q''(1) \neq 0$ donc 1 racine double pour Q.

(2) d'après (1) $(x-1)^2$ divise Q:

$(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$

$$\begin{array}{rr|l} & x^3 - x^2 - x + 1 & x^2 - 2x + 1 \\ - & x^3 - 2x^2 + x & x + 1 \\ \hline & x^2 - 2x + 1 & \\ - & x^2 - 2x + 1 & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

(0,5)

d'où $Q(x) = x^3 - x^2 - x + 1 = (x+1)(x-1)^2$ (0,5)

autre méthode :

$Q(x) = x^3 - x^2 - x + 1 = (x^3 - x^2) - (x-1) = x^2(x-1) - (x-1)$

$= (x-1)(x^2-1) = (x-1)(x-1)(x+1)$

$= (x+1)(x-1)^2$

(3) $P(x) = A(x)\,Q(x) + R(x)$ (0,5)

$= x\,(x^3 - x^2 - x + 1) + 4 = x^4 - x^3 - x^2 + x + 4$ (0,5)

$P(x) = x^4 - x^3 - x^2 + x + 4$

(4) division suivant les puissances croissantes à l'ordre 2 de P par Q.

$P(x) = x^4 - x^3 - x^2 + x + 4 = 4 + x - x^2 - x^3 + x^4$ 0,5

$Q(x) = x^3 - x^2 - x + 1 = 1 - x - x^2 + x^3$

$$\begin{array}{r|l}
4 + x - x^2 - x^3 + x^4 & 1 - x - x^2 + x^3 \\
\hline
- \quad 4 - 4x - 4x^2 + 4x^3 & \underbrace{4 + 5x + 8x^2}_{A(x)} \\
\hline
5x + 3x^2 - 5x^3 + x^4 & \\
- \quad 5x - 5x^2 - 5x^3 + 5x^4 & \\
\hline
8x^2 - 4x^4 & \\
- \quad 8x^2 - 8x^3 - 8x^4 + 8x^5 & \\
\hline
\underbrace{8x^3 + 4x^4 - 8x^5}_{R(x)\, x^3} = x^3(8 + 4x - 8x^2) &
\end{array}$$

0,5 0,5

$P(x) = A(x) . Q(x) + x^3 R(x)$

$R(x) = 8 + 4x - 8x^2$; 0,5

$A(x) = 4 + 5x + 8x^2$; 0,5

2) $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x Q(x) + 4}{Q(x)} = x + \frac{4}{Q(x)}$

$G(x) = \frac{4}{Q(x)} = \frac{4}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$ 0,5

$a = \lim_{x \to -1} (x+1) G(x) = \frac{4}{(-1-1)^2} = \boxed{1 = a}$ 0,5

$c = \lim_{x \to 1} (x-1)^2 G(x) = \frac{4}{2} = \boxed{2 = c}$ 0,5

$\lim_{x \to +\infty} x G(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{4x}{(x+1)(x-1)^2} = a + b$

$\Rightarrow 0 = a + b \Rightarrow \boxed{b = -1.}$ 0,5

$G(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2}$.

$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = x + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2}$. 0,5

Exercice (2) :

$\forall x, y \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}: x * y = x + y + xy$.

(1) $0 * 1 = 0 + 1 + 0.1 = 1$ 0,25

$(-2) * 2 = -2 + 2 + (-2)(2) = -4$ 0,25

(2) $(\mathbb{R}\setminus\{-1\}, *)$ gpe abélien.

(i) $*$ commutative : $\forall x, y \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}: x * y = y * x$

Soit $x, y \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$: 0,5

$x * y = x + y + xy = y + x + yx = y * x$

$\Rightarrow *$ est commutative.

(ii) $*$ associative : $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}: (x * y) * z = x * (y * z)$

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

$(x * y) * z = (\underbrace{x + y + xy}_{t}) * z = t * z = t + z + tz$

$= (x + y + xy) + z + (x + y + xy) \cdot z$

$= x + y + xy + z + xz + yz + xyz$

$\boxed{(x * y) * z = x + y + z + xy + xz + yz + xyz}$ (I)

$x * (y * z) = x * (\underbrace{y + z + yz}_{s}) = x * s = x + s + xs$

$= x + (y + z + yz) + x(y + z + yz)$

$= x + y + z + yz + xy + xz + xyz$

$\boxed{x * (y * z) = x + y + z + xy + xz + yz + xyz}$ (II)

1

$\forall (x, y, z) \in (\mathbb{R}\setminus\{-1\})^3$, on obtient que $(x*y)*z = x*(y*z)$
donc $*$ est associative.

(iii) Existence de l'élément neutre : $\exists e \in \mathbb{R}\setminus\{-1\} : \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\} : x*e = e*x = x$

Supposons $\exists e \in \mathbb{R}\setminus\{-1\} : \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\} : x*e = e*x = x$

Mais comme $*$ est commutative : $x*e = x \Rightarrow x+e+x.e = x$

$\Rightarrow e(x+1) = 0$

$\Rightarrow e = 0$ car $x \neq -1$ 0,75

$e = 0$ est l'élément neutre par $*$.

(iv) Élément symétrique : $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}, \exists x' \in \mathbb{R}\setminus\{-1\} : x*x' = x'*x = e$

Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$: $x*x' = e$ car $*$ est commutative.

$x*x' = e \Rightarrow x+x'+xx' = 0 \Rightarrow x'(1+x) = -x$

$\Rightarrow x' = \dfrac{-x}{1+x}$, car $x \neq -1$

Montrons par l'absurde que $x' = \dfrac{-x}{1+x} \neq -1$ 0,75

Supposons que $x' = -\dfrac{x}{1+x} = -1 \Rightarrow -x = -1-x$

$\Rightarrow -1 = 0$ contradiction

donc $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}, \exists x' = \dfrac{-x}{1+x} \in \mathbb{R}\setminus\{-1\} : x*x' = x'*x = 0$

$x' = \dfrac{-x}{1+x}$ le symétrique de x.

Conclusion : $(\mathbb{R}\setminus\{-1\}, *)$ est un groupe abélien. 0,5

(c) $f : (\mathbb{R}\setminus\{-1\}, *) \longrightarrow (\mathbb{R}^*, \cdot)$. $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$, $f(x) = x+1$

(i) $f(e) = f(0) = 0+1 = 1 \Rightarrow f(e) = f(0) = 1$. 0,25

(ii) f morphisme de groupe : $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$: $f(x_1 * x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$ 0,5

Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$

$$f(x_1 * x_2) = f(\underbrace{x_1+x_2+x_1x_2}_{t}) = f(t) = t+1$$
$$= x_1+x_2+x_1x_2+1$$
$$= x_2(1+x_1) + x_1 + 1 = (x_1+1)(x_2+1) = f(x_1) \cdot f(x_2)$$

$f(x_1 * x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$ 0,5

$\Longrightarrow f$ est un morphisme de groupe.

Exercice 3

$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; x+y+z=0\}$

i) E s.e.v de $\mathbb{R}^3 \Leftrightarrow \begin{cases} E \neq \phi \\ \forall u,v \in E, u+v \in E \\ \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u \in E, \alpha u \in E \end{cases}$ 0,5

. $(0,0,0) \in E$ car $0+0+0=0 \Longrightarrow E \neq \phi$. 0,5

. Soient $u=(x_1,y_1,z_1)$ et $v=(x_2,y_2,z_2) \in E$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_1+y_1+z_1 = 0 \\ x_2+y_2+z_2 = 0 \end{cases}$$

$$u+v = (x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2) = (X,Y,Z)$$

On a $X+Y+Z = (x_1+x_2)+(y_1+y_2)+(z_1+z_2)$
$$= \underbrace{(x_1+y_1+z_1)}_{0} + \underbrace{(x_2+y_2+z_2)}_{0} = 0$$ 1,5

$\Longrightarrow u+v \in E$

. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $u=(x,y,z) \in E \Longrightarrow x+y+z=0$

$\alpha u = (\alpha x, \alpha y, \alpha z) = (a,b,c)$

On a : $a+b+c = \alpha x + \alpha y + \alpha z = \alpha\underbrace{(x+y+z)}_{0} = 0$ 1

$\Longrightarrow \alpha u \in E$

Conclusion : E est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$ 0,5

(ii) $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$

$0_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0) \notin F$ car $0 + 0 + 0 = 0 \neq 1$ → 1

$\Rightarrow$ F n'est pas un s.e.v de $\mathbb{R}^3$.

Suite exercice ②

③ Résoudre dans $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$:

. $x * 1 = 3 \Rightarrow x + 1 + x.1 = 3$

$\Rightarrow 2x + 1 = 3$

$\Rightarrow \boxed{x = 1}$ 0,5

. $x * x * 1 = 1 \Rightarrow (x * x) * 1 = 1$

$\Rightarrow (x + x + x^2) * 1 = 1$

$\Rightarrow (x^2 + 2x) + 1 + (x^2 + 2x).1 = 1$

$\Rightarrow 2x^2 + 4x + 1 = 1$

$\Rightarrow 2x^2 + 4x = 0$ 1,25

$\Rightarrow x(x + 2) = 0$

$\Rightarrow x = 0$ ou $x = -2$