Université Aboubekr Belkaïd Tlemcen *A.U. 2022/2023*
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
L1 mathématiques

Corrigé du Partiel d'ANALYSE 2
du *27 avril 2023*

Exercice 1 : [**6 pts**]

a) Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction :

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

b) f est-elle de classe C^1?

REP :

a) **Continuité** :

Pour $x \neq 0$, la fonction f est continue comme opérations de fonctions continues. *0.5*

D'autre part, comme x^2 tend vers 0 quand $x \to 0$ et que $\sin\frac{1}{x}$ est bornée,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ \neq}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ \neq}} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0.$$

0.75

Ainsi $\lim_{\substack{x\to 0\\ \neq}} f(x) = f(0)$. Donc f est continue en 0. *0.75*

En definitive, f est continue dans $\mathbb{R}$. *0.5*

Dérivabilité :

Pour $x \neq 0$, la fonction f est dérivable comme opérations de fonctions dérivables. *0.5*

Dérivabilité en 0: pour $x \neq 0$,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{x} = x \sin\frac{1}{x}$$

d'où

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ \neq}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ \neq}} x \sin\frac{1}{x} = 0$$

car c'est le produit d'une fonction qui tend vers 0 par une fonction bornée. *1*

On conclut que f est aussi dérivable en 0 et que $f'(0) = 0$, *0.5*

En définitive, f est dérivable dans $\mathbb{R}$ tout entier. *0.5*

REMARQUE : Si l'étudiant(e) n'étudie que la dérivabilité, on ne lui ajoute les points de la continuité que si il (elle) précise que la continuité découle de la dérivabilité. Sinon, on lui attribue la moitié de la note réservée à la continuité, c-à-d '1.25'.

b) Pour vérifier si f est de classe C^1, nous devons calculer l'expression de la dérivée de f en dehors de 0 et examiner la continuité de la dérivée f' de f. Or, pour x non nul,

$$f'(x) = 2x \sin\frac{1}{x} + x^2\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cos\frac{1}{x} = 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}.$$

Ainsi

$$f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

0.5

Comme $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ \neq}} \cos\frac{1}{x}$ n'existe pas, on n'a pas

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ \neq}} f'(x) = f'(0).$$

Donc f' n'est pas continue en 0. *0.5*

Conclusion : f n'est pas de classe C^1.

Exercice 2 : [**6 pts**]

En utilisant les dérivées de *Arcsinus* et *Arcosinus*, montrer que

$$\forall x \in [-1,1],\ \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

REP :

Posons $f(x) = \arcsin x + \arccos x$ pour $x \in [-1,1]$. On sait alors que f est dérivable dans $]-1,1[$ et on a

$$\forall x \in]-1,1[,\ f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = 0.$$
$$\Rightarrow \forall x \in]-1,1[,\ f(x) = C \text{ constante.}$$

1+1+0.5

En particulier,

$$f(0) = \arcsin 0 + \arccos 0 = C$$
$$\Leftrightarrow 0 + \frac{\pi}{2} = C$$

0.75

et donc

$$\forall x \in]-1,1[,\ f(x) = \frac{\pi}{2}.$$

0.25

De plus,

$$f(-1) = \arcsin(-1) + \arccos(-1) = -\frac{\pi}{2} + \pi = \frac{\pi}{2},$$
$$f(1) = \arcsin 1 + \arccos 1 = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}.$$

1+1

Conclusion: $\forall x \in [-1,1]$, $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$. *0.5*

Exercice 3 : [**8 pts**]

I) Montrer, à l'aide de la formule de *Taylor-Lagrange*, que

$$\forall x > 0,\ \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

II) Trouver les DL en 0 à tous les ordres possibles de $2 + x - x^3 \ln|x|$.

Les questions (I) et (II) sont indépendantes.

REP :

I) Soit f définie sur R_+ par $f(x) = \ln(1+x)$.

f est 3 fois continûment dérivable dans $[0,x]$ avec $x > 0$ et admet une dérivée d'ordre 4 dans $]0,x[$. D'après le théorème de Taylor-Lagrange (en fait c'est une formule de MacLaurin), il existe c dans $]0,x[$ tel que

$$(F) \quad f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(c)}{4!}x^4, \; x > 0$$

0.5

Calcul des dérivées :

$$\begin{array}{ll} f(x) = \ln(1+x) & \Rightarrow f(0) = 0, \\ f'(x) = (1+x)^{-1} & \Rightarrow f'(0) = 1, \\ f''(x) = -(1+x)^{-2} & \Rightarrow f''(0) = -1, \\ f'''(x) = 2(1+x)^{-3} & \Rightarrow f'''(0) = 2, \\ f^{(4)}(x) = -6(1+x)^{-4}. & \end{array}$$

0.5x5

(F) s'écrit alors après simplifications

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2(1+c)^4}x^4.$$

0.5

De là,

$$\ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) = -\frac{3}{2(1+c)^4}x^4 < 0,$$

0.5

d'où

$$\forall x > 0, \; \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

0.5

II) Rappelons d'abord que $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ \neq}} x^n \ln|x| = 0$, pour tout $n \geq 1$. *0.5*

Soit $f(x) = 2 + x - x^3 \ln|x|$ définie au voisinage de 0 mais pas en 0.

$DL_0(0)$: $f(x) = 2 + x^0\varepsilon_0(x)$, avec $\varepsilon_0(x) = x - x^3\ln|x| \to 0$ quand $x \underset{\neq}{\to} 0$. *0.75*

$DL_1(0)$: $f(x) = 2 + x + x^1\varepsilon_1(x)$, avec $\varepsilon_1(x) = -x^2\ln|x| \to 0$ quand $x \underset{\neq}{\to} 0$. *0.75*

$DL_2(0)$: $f(x) = 2 + x + x^2\varepsilon_2(x)$, avec $\varepsilon_2(x) = -x \ln|x| \to 0$ quand $x \underset{\neq}{\to} 0$. *0.75*

Le $DL_n(0)$ pour $n \geq 3$ n'existe pas car, pour $n = 3$, le reste serait $-\ln|x| \not\to 0$ quand $x \underset{\neq}{\to} 0$. *0.75*

Quand le grand mathématicien David Hilbert apprit qu'un des étudiants avait abandonné ses études de maths pour s'intéresser à la poésie, il s'écria : "Bon, il n'avait pas assez d'imagination pour devenir mathématicien !"