Université Abou Bekr Belkaid - Tlemcen
Faculté des sciences
Département de mathématiques

Année universitaire: 2022 - 2023
Module: Algèbre 2
L1 Math

Contrôle continu

Exercice 1 (8 pts)

(1) Calculer, développer et ordonner suivant les puissances décroissantes, le polynôme suivant :

$$P(x) = (1+x)(x^3+1) + (2+x)(x-1).$$

(2) Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ en produit de polynômes irréductibles, le polynôme suivant :

$$Q(x) = x^3 + x^2 + x + 1\ .$$

(3) Faire la division euclidienne de $P(x)$ par $Q(x)$.

(4) Effectuer la division suivant les puissances croissantes à l'ordre 2 de $P(x)$ par $Q(x)$.

(5) Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle suivante :

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Exercice 2 (7 pts)

On muni l'ensemble des réels $\mathbb{R}$ d'une L.C.I $*$ définie par :

$$\forall x,y \in \mathbb{R},\ x * y = x + y + 1$$

(1) Calculer

$$0 * 1 \text{ et } (-1) * 2$$

(2) Montrer que $(\mathbb{R}, *)$ est un groupe abélien.

(3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$x * 1 = 3 \text{ et } x * x * 1 = 1.$$

(4) On définit l'application

$$f : (\mathbb{R}, *) \to (\mathbb{R}, +) \text{ par : } \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x + 1$$

où $(\mathbb{R}, +)$ est le groupe additif des réels.

(i) Calculer $f(e)$, où e est l'élément neutre pour la loi $*$.

(ii) Montrer que f est un morphisme de groupe.

Exercice 3 (Questions de cours) (5 pts)

Soient E un $\mathbb{R} - e.v$ et F un sous espace vectoriel de E.

(1) Rappeler la définition d'un sous espace vectoriel.

(2) Application

Montrer que le sous ensemble F de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; z = x + y\right\}$$

est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Bon courage

Corrigé contrôle continu Algèbre 2 L1 Math

Exercice (1) 8pts

① $P(x) = (1+x)(x^3+1) + (2+x)(x-1)$

$= x^3 + 1 + x^4 + x + 2x - 2 + x^2 - x$

$P(x) = x^4 + x^3 + x^2 + 2x - 1 \longrightarrow$ (0,5)

② $Q(x) = x^3 + x^2 + x + 1 = x^2(x+1) + (x+1) = (x+1)(x^2+1)$

$Q(x) = (x+1)(x^2+1) \longrightarrow$ (1)

③ Division euclidienne de P par Q :

$$\begin{array}{r|l} x^4 + x^3 + x^2 + 2x - 1 & x^3 + x^2 + x + 1 \\ \hline - \quad x^4 + x^3 + x^2 + x & x \\ \hline x - 1 & \end{array}$$

$x - 1 \longrightarrow$ le reste $R(x) = x - 1$

$x \longrightarrow$ le quotient $A(x) = x$

$\longrightarrow$ (1)

$P(x) = A(x)Q(x) + R(x)$

$x^4 + x^3 + x^2 + 2x - 1 = x(x^3 + x^2 + x + 1) + x - 1$

④ Division suivant les puissances croissantes à l'ordre 2.

$P(x) = -1 + 2x + x^2 + x^3 + x^4$, $Q(x) = 1 + x + x^2 + x^3$

$$\begin{array}{r|l} -1 + 2x + x^2 + x^3 + x^4 & 1 + x + x^2 + x^3 \\ \hline - \quad -1 - x - x^2 - x^3 & \underbrace{-1 + 3x - x^2}_{A(x)} \\ \hline 3x + 2x^2 + 2x^3 + x^4 & \\ - \quad 3x + 3x^2 + 3x^3 + 3x^4 & \\ \hline -x^2 - x^3 - 2x^4 & \\ -x^2 - x^3 - x^4 - x^5 & \\ \hline \underbrace{-x^4 + x^5}_{x^3(-x + x^2)} & \end{array}$$

$x^3 R(x)$

$\longrightarrow$ (2)

$P(x) = A(x)Q(x) + x^3 R(x)$

$-1 + 2x + x^2 + x^3 + x^4 = (-1 + 3x - x^2)(1 + x + x^2 + x^3) + x^3(-x + x^2)$

⑤ Décomposition en éléments simples : $F(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$.

$\deg(P) = 4 > 3 = \deg(Q)$, on effectue d'abord la division euclidienne

d'après (1) : $P(x) = x\,Q(x) + x - 1$

d'où $F(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{x\,Q(x) + x - 1}{Q(x)} = x + \dfrac{x-1}{Q(x)}$ → 0,5

On décompose la fraction $G(x) = \dfrac{x-1}{Q(x)}$ en éléments simples

d'après (2) : $Q(x) = (x+1)(x^2+1)$

$$G(x) = \frac{x-1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2+1} \to 0{,}5$$

• $a = \lim\limits_{x\to -1} (x+1)G(x) = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x^2+1)} = \dfrac{-2}{2} = \boxed{-1 = a}$ → 0,5

• $\lim\limits_{x\to +\infty} xG(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x(x-1)}{(x+1)(x^2+1)} = \lim\limits_{x\to +\infty} \left[\dfrac{x \cdot a}{x+1} + x\,\dfrac{bx+c}{x^2+1}\right]$

$$\Rightarrow \quad 0 = a + b \Rightarrow b = -a \Rightarrow \boxed{b = 1} \to 0{,}5$$

• $G(0) = \dfrac{-1}{1} = a + c \Rightarrow c = -1 - a \Rightarrow \boxed{c = 0}$ → 0,5

$$G(x) = -\frac{1}{x+1} + \frac{x}{x^2+1} \to 0{,}5$$

et $F(x) = x - \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{x}{x^2+1}$ → 0,5

Exercice 2 7pts

$\mathbb{R}$ muni de la L.C.I $*$ définie par : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x * y = x + y + 1$

(1) $0 * 1 = 0 + 1 + 1 = 2$ → 0,25 , $(-1) * 2 = -1 + 2 + 1 = 2$ → 0,25

(2) $(\mathbb{R}, *)$ est un gpe abélien $\begin{cases} * \text{ commutative} \\ * \text{ associative} \\ * \text{ admet un élément neutre dans } \mathbb{R} \\ \text{tout réel } x \text{ admet un symétrique dans } \mathbb{R}. \end{cases}$ → 0,5

• $*$ est commutative : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x * y = y * x$. → 0,25

Soient $x, y \in \mathbb{R}$, $x * y = x + y + 1 = y + x + 1 = y * x$. $\Rightarrow$ $*$ est commutative. → 0,25

• $*$ est associative : $\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ (x * y) * z = x * (y * z)$ → 0,25

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$.

$(x * y) * z = (x+y+1) * z = (x+y+1)+z+1 = x+y+z+2 \to 0{,}25$

$x * (y * z) = x * (y+z+1) = x+(y+z+1)+1 = x+y+z+2 \to 0{,}25$

d'où $(x*y)*z = x*(y*z) \Rightarrow *$ est associative. $\to 0{,}25$

• <u>Élément neutre</u> : $\exists e \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x * e = e * x = x. \to 0{,}25$

et comme $*$ est ~~associati~~ commutative, $\exists e \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x * e = x$

cherchons $e \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x * e = x$.

soit $x \in \mathbb{R}$, $\quad x * e = x \Rightarrow x + e + 1 = x \Rightarrow e = -1 \to 0{,}5$

$\exists e = -1 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad x * (-1) = x.$

$e = -1$, élément neutre pour $*$.

• <u>Élément symétrique</u> : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists x' \in \mathbb{R}, x * x' = x' * x = e \to 0{,}25$

comme $*$ est commutative, $\forall x \in \mathbb{R}, \exists x' \in \mathbb{R}, \quad x * x' = e.$

soit $x \in \mathbb{R}$. cherchons $x' \in \mathbb{R}$, $x * x' = e = -1$

$x * x' = -1 \Rightarrow x + x' + 1 = -1 \Rightarrow x' = -2 - x \to 0{,}5$

$\forall x \in \mathbb{R}, \exists x' = -2 - x \in \mathbb{R}, \quad x * x' = -1$

le symétrique de $x \in \mathbb{R}$ est $x' = -2 - x$.

<u>Conclusion</u> : $(\mathbb{R}, *)$ est un groupe abélien. $\to 0{,}5$

(3) $x * 1 = 3 \Rightarrow x + 1 + 1 = 3 \Rightarrow x = 1 \to 0{,}25$

<u>autre méthode</u> : $x * 1 = 3 \Rightarrow x * \underbrace{1 * 1'}_{e} = 3 * 1'$ ($1'$ symétrique de 1 : $1' = -3$

$\Rightarrow x * e = 3 * (-3)$

$\Rightarrow x = 3 - 3 + 1 = 1 = x$

$x * x * 1 = 1 \Rightarrow (x * x) * 1 = 1 \Rightarrow (x + x + 1) * 1 = 1$

$\Rightarrow 2x + 1 + 1 + 1 = 1 \Rightarrow x = -1 \quad \to 0{,}5$

<u>autre méthode</u> :

$x * x * 1 = 1 \Rightarrow x * x * \underbrace{1 * 1'}_{e} = \underbrace{1 * 1'}_{e}$ $\quad$ ($1' = -3$ symétrique de 1)

$\Rightarrow x * x * e = e$

$\Rightarrow x * x = -1 \Rightarrow 2x + 1 = -1 \Rightarrow x = -1.$

(4) $f : (\mathbb{R}, *) \longrightarrow (\mathbb{R}, +)$, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x + 1.$

(iii) $f(e) = f(-1) = -1+1 = 0 \Rightarrow f(e) = f(-1) = 0$. → 0,25

(iv) f morphisme de groupe: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $f(x_1 * x_2) = f(x_1) + f(x_2)$? → 0,5

Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. $f(x_1 * x_2) = f(x_1 + x_2 + 1) = (x_1 + x_2 + 1) + 1 = x_1 + x_2 + 2$

$= (x_1 + 1) + (x_2 + 1)$

$f(x_1 * x_2) = f(x_1) + f(x_2)$

$\Rightarrow$ f est un morphisme de groupe. 1

Exercice (3) 5,75

① E $\mathbb{R}$-e.v. $F \subset E$.

F s.e.v de E $\Leftrightarrow \begin{cases} \cdot F \neq \emptyset \ (0_E \in F) \\ \cdot \forall u, v \in F,\ u+v \in F \\ \cdot \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u \in F,\ \alpha u \in F. \end{cases}$ → 1

② $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ z = x+y\} \subset \mathbb{R}^3$

Montrons que F est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$

- $0_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0) \in F$ car $0 = 0+0 \Rightarrow F \neq \emptyset$. → 0,5
- Soient $u = (x_1, y_1, z_1)$, $v = (x_2, y_2, z_2) \in F \Rightarrow \begin{cases} z_1 = x_1 + y_1 \\ z_2 = x_2 + y_2 \end{cases}$

$u + v = (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (\underbrace{x_1 + x_2}_{X}, \underbrace{y_1 + y_2}_{Y}, \underbrace{z_1 + z_2}_{Z}) = (X, Y, Z)$

$X + Y = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = \underbrace{(x_1 + y_1)}_{z_1} + \underbrace{(x_2 + y_2)}_{z_2} = z_1 + z_2 = Z$ 1,5

d'où $u + v \in F$

. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $u = (x, y, z) \in F$ ie $z = x+y$.

$\alpha u = \alpha (x, y, z) = (\underbrace{\alpha x}_{t}, \underbrace{\alpha y}_{s}, \underbrace{\alpha z}_{k}) = (t, s, k)$ 1,5

$t + s = (\alpha x) + (\alpha y) = \alpha(\underbrace{x+y}_{z}) = \alpha z = k$

d'où $\alpha u \in F$

Conclusion: F est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$ → 0,5