Université Aboubekr Belkaïd Tlemcen *A.U. 2022/2023*
Faculté des Sciences / Département de Mathématiques
Licence 1 Mathématiques

Liste 1 : **Les nombres réels**.

Exercice 1 :
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $(a',b',m,n) \in \mathbb{R}_+^{*4}$ tels que $\frac{a}{a'} > \frac{b}{b'}$. Montrer que

$$\frac{b}{b'} < \frac{ma+nb}{ma'+nb'} < \frac{a}{a'}.$$

Exercice 2 :
1. Soit a un réel positif. Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a)$.
2. Vérifier que pour tout x,y dans $\mathbb{R}$, $||x|-|y|| \leq |x-y| \leq |x|+|y|$.

Exercice 3 : (*Partie entière d'un réel*)
$a.$ Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$[x] = 5,\ [x+a] = -2,\ [\tfrac{a}{x}] = 1, \text{ où } a \text{ est un paramètre réel.}$$

$b.$ Montrer que pour tout x,y dans $\mathbb{R}$, $[x+y] = [x]+[y]+\varepsilon$, où $\varepsilon \in \{0,1\}$.
$c.$ A-t-on $\forall x \in \mathbb{R}^*, [1/x] = 1/[x]$?

Exercice 4 :
Si $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres rationnels et $\mathbb{I}$ l'ensemble des nombres irrationnels, montrer que :
$a.$ $\forall x \in \mathbb{Q},\ \forall y \in \mathbb{I},\ x+y \in \mathbb{I}$.
$b.$ $\forall x \in \mathbb{Q}^*,\ \forall y \in \mathbb{I},\ xy \in \mathbb{I}$.

Exercice 5 :
1. Montrer que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ et $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ sont des nombres irrationnels.
Aux étudiants de montrer plus généralement que si n est premier, alors $\sqrt{n}$ est irrationnel. La réciproque est-elle vraie?
2. Montrer l'implication suivante :

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N},\ p \neq q, (\sqrt{p}+\sqrt{q} \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{p}-\sqrt{q} \notin \mathbb{Q}).$$

Exercice 6 :
1. Montrer par l'absurde que si $n \in \mathbb{N}$ n'est pas un carré parfait, alors $\sqrt{n}$ est irrationnel.
2. En déduire que si $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ ne sont pas des carrés parfaits, alors $\sqrt{m}+\sqrt{n}$ est irrationnel.

Exercice 7 : Etablir que :
1. $\forall (a,b) \in \mathbb{Q}^2$, $(a+b\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow a = b = 0)$.
2. (A laisser aux étudiants) $\forall (a,b,c) \in \mathbb{Q}^3$, $(a\sqrt{2}+b\sqrt{3}+c\sqrt{5} = 0 \Leftrightarrow a = b = c = 0)$.

Exercice 8 :

Soit A une partie non vide de R. Traduire à l'aide des quantificateurs les propriétés suivantes dans R :

(1) 5 est un majorant de A; (2) 7 n'est pas un minorant de A; (3) A n'est pas majorée; (4) A n'est pas bornée.

Exercice 9 :

Rappel (voir cours) : Une partie I non vide de R et non réduite à un point est appelée *intervalle* de R si

$$\forall x,y \in \mathrm{R},\ \forall z \in \mathrm{R},\ (x < z < y \Rightarrow z \in I).$$

1. Montrer que l'ensemble $\{x \in \mathrm{R} : (x-3)(x+2) \geq 0\} \cap [-4,4]$ n'est pas un intervalle de R.

2. Soit I_1 et I_2 deux intervalles de R. On sait que

$$I_1 \cap I_2 \neq \emptyset \Longrightarrow I_1 \cup I_2 \text{ est un intervalle de R.}$$

La réciproque est-elle vraie?

Exercice 10 :

Déterminer dans R, s'ils existent, les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément des parties de R suivantes :

$A =]-1.5, 10]$, $B =]e,3] \cup \{\pi\}$, $\{n \in \mathrm{N} : n^2 - 2 > 0\}$, $C = \{x \in \mathrm{Q} : x^2 < 2\}$.

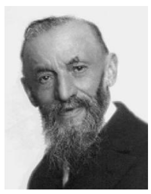
L'ensemble C admet-il une borne supérieure et une borne inférieure dans Q ?

Exercice 11 :

Soient A et B deux parties non vides et bornées de R. Montrer que :

1. $A \subset B \Longrightarrow SupA \leq SupB$ et $InfB \leq InfA$.
2. $Sup(A \cup B) = Max(SupA, SupB)$.

Julius Wilhelm Richard DEDEKIND
1831-1916



Giuseppe PEANO
1858-1932

Connaître une langue étrangère, c'est accéder à une autre civilisation, une autre manière de penser, contribuer à la paix par la compréhension et le dialogue; c'est aussi s'offrir des possibilités économiques et de loisirs nouveaux.

Joachim Charles Hitzke (1936-2021)