Université Aboubekr Belkaïd Tlemcen *A.U. 2022/2023*
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Licence 1 Mathématiques

Liste 0.1 : **Après tout**, **c'est déjà vu au lycée**.

Habituer l'étudiant(e) à une rédaction soignée et à la compréhension de la langue.

Exercice 1 : Résoudre dans R les équations et l'inégalité suivantes :

$$\sqrt{|x-1|} = \sqrt{x-2}, \quad |x^2-6x+3| = 3,$$
$$|x^2-6x+3| \leq 3.$$

Exercice 2 : Calculer comme vous savez le faire les limites des suites de termes généraux suivants :

$$\frac{n^4-3n^2+\pi}{\sqrt{5n^8-9}}, \quad \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n}.$$

Exercice 3 : a. Quel est le domaine de définition des fonctions :

$$x \mapsto f(x) = \ln(2x^2-4x+1), \; x \mapsto f(x) = \sin(2x+1).$$

b. Calculer comme vous savez le faire les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}, \quad \lim_{x\to 0}\left(x+\frac{\sqrt{x^2}}{x}\right), \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sin 3x}.$$

Exercice 4 : a. Résoudre en (x,y) dans R^2 le système d'équations suivant en discutant en fonction du paramètre réel m :

$$\begin{cases} (m+1)x+y = 2m, \\ (2m+1)x+y = 3m+1. \end{cases}$$

b. Soit (D) et (D') les deux droites du plan d'équations respectives $y = -(m+1)x+2m$, et $y = -(2m+1)x+3m+1$. Etudier les positions relatives des deux droites (confondues? parallèles? sécantes?).

Liste 0.2 Un peu de logique, **voyons**!

1. **Langage courant / langage mathématique** :

a. Soit la phrase du langage naturel : " Les mathématiciens portent tous des lunettes". Laquelle des phrases suivantes en est la **négation** ?

1. Aucun mathématicien ne porte de lunettes.
2. Ceux qui portent des lunettes sont des mathématiciens.
3. Il y a des mathématiciens qui ne portent pas de lunettes.
4. Il y a des porteurs de lunettes qui ne sont pas mathématiciens.

b. Voici un énoncé mathématique :

"*Soit un quadrilatère ABCD. Si ABCD est un rectangle, alors ses diagonales ont même longueur.*"

1. Soit un quadrilatère (رباعي الأضلاع) dont les diagonales (القطران) mesurent 2 cm et 3 cm. Est-ce un rectangle (مستطيل) ?

2. Soit ABCD un parallélogramme (متوازي الأضلاع). Est-ce un quadrilatère dont les diagonales sont de même longueur ?

3. Un quadrilatère a des diagonales de même longueur. Est-ce un rectangle ?

4. Un quadrilatère a trois angles droits. A-t-il des diagonales de même longueur ?

2. **Quantification** :

a. Interpréter les deux phrases formelles suivantes ? Quelles sont leurs valeurs de vérité? Sont-elles logiquement équivalentes?

$$\forall x \in \mathbb{N},\ \forall y \in \mathbb{N},\ x - y \in \mathbb{N},$$
$$\forall y \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{N},\ x - y \in \mathbb{N}.$$

b. Les deux phrases formelles suivantes ont-elles une même interprétation? Quelles sont leurs valeurs de vérité? Sont-elles logiquement équivalentes?

$$\exists x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N},\ x - y \in \mathbb{N},$$
$$\exists y \in \mathbb{N},\ \exists x \in \mathbb{N},\ x - y \in \mathbb{N}.$$

c. Les deux phrases formelles suivantes ont-elles une même interprétation? Quelles sont leurs valeurs de vérité? Sont-elles logiquement équivalentes?

$$\exists x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N},\ x \leq y,$$
$$\forall y \in \mathbb{N},\ \exists x \in \mathbb{N},\ x \leq y.$$

Leurs négations sont-elles logiquement équivalentes ?

Que se passe-t-il si on remplace $x \leq y$ par $x < y$?

d. Qu'en est-il des deux phrases formelles suivantes ?

$$\forall x \in \mathbb{N},\ \exists y \in \mathbb{N},\ x^2 = y,$$
$$\exists y \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{N},\ x^2 = y.$$

3. **Preuve d'une proposition existentielle** :

Montrer que les propositions suivantes sont vraies.

a. $\exists x \in \mathbb{Z},\ x^3 - 2x - 1 = 0.$

b. $\exists x \in \mathbb{Z},\ \exists y \in \mathbb{Z}^*,\ (x|(x-y)) \wedge (x \neq y),$

où la notation $a|b$ signifie que a est un diviseur de b.

4. **Preuve d'une proposition universelle** :

Montrer que la proposition suivante est vraie.

$\forall x \in \mathbb{Z},\ [x$ impair$\Rightarrow x^2$ impair$]$.

A-t-on $\forall x \in \mathbb{Z},\ [x^2$ pair$\Rightarrow x$ pair$]$?

5. **Une petite preuve par l'absurde** :

Soit $d \in \mathbb{Q}$. On dit que d est un nombre décimal s'il sécrit avec un 'nombre fini' de chiffres après la virgule. Autrement dit,

$$d \text{ est décimal} \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z},\ \exists s \in \mathbb{N} : d = \frac{n}{10^s}$$

Montrer que $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal.

La politique c'est éphémère mais une équation est éternelle.

.السياسة سريعة الزوال لكن المعادلة أبدية Albert Einstein