Université Abou Bekr Belkaid - Tlemcen
Faculté des sciences
Département de mathématiques

Année universitaire: 2022 - 2023
Module: Algèbre 1
L1 Math

T.D N°2 : Ensembles et applications

Exercice 1

(1) Ecrire en extension les ensembles suivants:
$A = \left\{n \in \mathbb{N} \backslash \frac{\sqrt{2}}{2} < n < \sqrt{2}\,\pi\right\}$ et $B = \left\{x \in \mathbb{R} \backslash \exists (n,p) \in \mathbb{N}^2 : \ x = \frac{n}{p} \text{ et } 1 \leq p \leq 2n \leq 5\right\}$.

(2) Ecrire en compréhension les ensembles suivants:
$C = \{2,3,5,7,11,17,19,23,29\}$ et $D = \{1,2,3,4,6,8,12,24\}$.

Exercice 2

(1) Considérons les deux ensembles A et B définis par:
$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash\ 2x - y = 1\right\}$ et $B = \left\{(t+1, 2t+1) \backslash\ t \in \mathbb{R}\right\}$. Montrer que $A = B$

(2) Soit $E = \left\{x \in \mathbb{Z} \backslash \left|x - \frac{1}{2}\right| < 1\right\}$. Déterminer $P(E)$ et $P(P(E))$.

(3) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $A_n = \left]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$.

(i) Montrer que la famille des ensembles $\left\{A_n, n \in \mathbb{N}^*\right\}$ est un recouvrement de l'intervalle $]0,1]$.

(ii) En déduire que $\left\{A_n, n \in \mathbb{N}^*\right\}$ est une partition de $]0,1]$.

Exercice 3

Soient A, B, et C des parties d'un ensemble E.

(1) Montrer que : $\forall\ A, B,\ C \in P(E)$, on a : $\left[A \cap B = A \cap C \ \ et\ A \cup B = A \cup C\right] \Rightarrow B = C$

(2) En déduire que si : $A \cup B = E$ et $A \cap B = \emptyset$, alors A et B sont complémentaires dans E.

(3) Démontrer que: $A \cap B = A \cup B \Rightarrow A = B$, en utilisant : (i) Raisonnement directe. (ii) La contraposée.

Exercice 4

Considérons les deux ensembles E et F définis par :
$E = \left\{n \in \mathbb{N} \backslash\ n \text{ divise } 4 \text{ ou } n \text{ divise } 6\right\}$ et $F = \left\{n \in \mathbb{N} \backslash\ n \text{ impair et } n < 9\right\} \cup \{0, 10\}$.
Soit $f : E \longrightarrow F$ une application définie par son graphe $G = \{(1,3),(2,5),(3,5),(4,0),(6,7)\}$.

(1) Vérifier que f est bien une application. (2) f est-elle injective? surjective?

(3) Déterminer $f(4), f(\{4\}), f\left(\{n \in \mathbb{N} \backslash\ n \text{ divise } 4\}\right)$ et $f(E)$.

(4) Déterminer $f^{-1}(0), f^{-1}(\{0\}), f^{-1}(\{5\}), f^{-1}\left(\{n \in \mathbb{N} \backslash\ n \text{ impair et } n < 9\}\right)$ et $f^{-1}(F)$.

Exercice 5

Soient $f : E \longrightarrow F$ une application et A et B deux parties de E.

(1) Montrer que: $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. (2) Montrer à l'aide d'un contre exemple que: $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$.

(3) Trouver une condition sur f pour que : $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Exercice 6

(I) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application définie par: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

(1) Déterminer $f\left(\{x \in \mathbb{R} \backslash\ |x| = 1\}\right)$ et $f^{-1}\left(\{y \in \mathbb{R} \backslash\ y^3 = 8\}\right)$. (2) f est-elle injective? surjective? bijective?

(3) Déterminer $f\left([1, \sqrt{3}]\right), f\left(]-\sqrt{3}, -1]\right), f\left([-1, 2\sqrt{2}[\right), f(\mathbb{R}^+), f^{-1}(]0,1])$ et $f^{-1}\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right]\right)$.

(II) Soit $g = f\backslash_{\mathbb{R}^+} : \mathbb{R}^+ \to J$ où $J = f(\mathbb{R}^+)$. (g est la restriction de f sur $\mathbb{R}^+$).

(1) Montrer que g est bijective et déterminer g^{-1}. (2) Déterminer $g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ par deux méthodes.

(3) Calculer $g \circ g^{-1}(y)$ pour $y \in J$ et $g^{-1} \circ g(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^+$.

EXERCICES SUPPLEMENTAIRES

Exercice 1

Soient $A =]-\infty,3]$, $B = [-2,7[$ et $C =]-5,+\infty[$.
Déterminer : $A \cup B$, $B \cap C$, $C \backslash A$, $C_{\mathbb{R}}(B)$ et $A \triangle B$.

Exercice 2

Soit $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash\, x^2 + y^2 \leq 1\right\}$.
(1) Les couples $(1,0)$ et $(0,1)$ appartiennent-ils à A?
(2) Montrer que A ne peut être le produit cartésien de deux parties de $\mathbb{R}$.
Indication : Pa l'absurde et remaquer que $(1,1) \notin A$.

Exercice 3

Soient A,B, et C des parties d'un ensemble E. Montrer que :
(1) $(A\backslash B)\backslash C = A\backslash(B \cup C)$
(2) $C_E(A \cap B) = C_E(A) \cup C_E(B)$
(3) $A \triangle B = A \cap B \Leftrightarrow A = B = \emptyset$

Exercice 4

Considérons les deux parties de $\mathbb{R}^2$, $E = [0,1]$ et $F = [0,2]$
(1) Dessiner $E \times F$ et $E \times E$.
(2) Soient $\begin{array}{l} f : E \to F \\ x \mapsto 2-x \end{array}$ et $\begin{array}{l} g : F \to E \\ x \mapsto (x-1)^2 \end{array}$ deux applications.
(3) Préciser $g \circ f$ et $f \circ g$. A-t-on $g \circ f = f \circ g$ et $g \circ f = g$?
(4) Déterminer $f^{-1}(\{0\})$ et $g^{-1}\left(\left]0, \frac{1}{2}\right[\right)$.
(5) Montrer que: $g \circ f$ et bijective et préciser $(g \circ f)^{-1}$

Exercice 5

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application définie par: $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$.
(1) Déterminer $f(2)$ et $f\left(\frac{1}{2}\right)$. f est-elle injective?
(2) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $f(x) = 2$. f est-elle surjective? Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1,1]$.
(3) Montrer que l'application g définie sur $[-1,1]$ dans $[-1,1]$ par: $f(x) = g(x)$ est bijective et déterminer son inverse g^{-1}.

Exercice 6

Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \to]-1,1[$ définie par: $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ est bijective et déterminer f^{-1}.

Exercice 7

Soient E un ensemble. $f : P(E) \to \mathbb{R}$ une application telle que :
$\forall A$ et B deux sous ensembles disjoints de E on a : $f(A \cup B) = f(A) + f(B)$
(1) Montrer que : $f(\emptyset) = 0$.
(2) Montrer que : $\forall A, B \in P(E)$: $f(A \cup B) + f(A \cap B) = f(A) + f(B)$
Indication : $A \cup B = A \cup (B\backslash A)$ et $B = (A \cap B) \cup (B\backslash A)$ et remarquer que A et $(B\backslash A)$ sont disjoints, de même pour $(A \cap B)$ et $(B\backslash A)$ et utiliser la définition de f.