Université Abou Bekr Belkaid - Tlemcen | Année universitaire: 2022 - 2023
Faculté des sciences | Module: Algèbre 1
Département de mathématiques | L1 Math

T.D N°1 : Logique et raisonnements

Exercice 1 Soient P, Q et R des propositions.

(1) En utilisant la table de vérité, montrer que l'implication suivante est toujours vraie :

$$\left[(P \Rightarrow Q) \wedge \left(\overline{P} \Rightarrow Q\right)\right] \Rightarrow Q$$

Application: Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que:

(i) $n(n+1)(n+2)$ est divisible par 3 $\qquad (ii)$ $(SUPP)\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} \in \mathbb{N}$

(2) Démontrer que les implications suivantes : (A) $\quad (P \wedge Q) \Rightarrow \overline{Q}$ et (B) $\quad \left(P \wedge \overline{Q}\right) \Rightarrow Q$ sont vraies toutes les deux si et seulement si P est fausse.

(3) $(SUPP)$ La proposition suivante est elle vraie? $\quad (P \wedge Q) \Rightarrow (\overline{P} \vee Q)$

(4) $(SUPP)$ Les propositions suivantes sont-elles des tautologies?

$$[(P \Rightarrow Q) \wedge P] \Rightarrow Q \quad \text{et} \quad (P \vee \overline{P}) \vee Q \Rightarrow (P \wedge \overline{P}) \wedge \overline{Q}$$

Exercice 2 (*Le OU exclusif* (XOR) *noté* $\oplus$)

Pour deux propositions A et B, on définit le OU exclusif (XOR) noté $\oplus$ par: $A \oplus B$ est vraie si A est vraie ou B est vraie et non toutes les deux vraies à la fois. Montrer que :

$$A \oplus B \Leftrightarrow (A \wedge \overline{B}) \vee (\overline{A} \wedge B) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (\overline{A} \vee \overline{B})$$

$$A \oplus B \Leftrightarrow B \oplus A \qquad (SUPP)(A \oplus B) \oplus C \Leftrightarrow A \oplus (B \oplus C)$$

$$A \oplus F \Leftrightarrow A \qquad A \oplus A \Leftrightarrow F$$

où A, B, C et F sont des propositions avec F fausse.

Exercice 3 (*Connecteurs NAND* (**NON ET**) *et NOR* (**NON OU**))

Pour deux propositions P et Q, on définit les connecteurs $NAND$ (**NON ET**) et NOR (**NON OU**) par

$$P\ NAND\ Q \Leftrightarrow P \uparrow Q \Leftrightarrow \overline{P \wedge Q} \text{ et } P\ NOR\ Q \Leftrightarrow P \downarrow Q \Leftrightarrow \overline{P \vee Q}$$

(1) Dresser les tables de vérité des deux connecteurs $NAND$ et NOR.

(2) Déterminer $P \uparrow P, P \downarrow P, \overline{P \uparrow Q}$ et $\overline{P \downarrow Q}$

(3) Exprimer $\overline{P}, P \vee Q, P \wedge Q$ et $P \Rightarrow Q$ à l'aide des connecteurs $NAND \uparrow$ et $NOR \downarrow$.

Remarque : Les connecteurs $NAND \uparrow$ et $NOR \downarrow$ ont une importance en informatique et en électronique.

Exercice 4 (*Logique à trois valeurs*)

Si on n'accepte pas le principe du tiers exclu (comme c'est le cas dans la logique intuitionniste, المنطق الحدسي), on est tenté d'introduire une troisième valeur de vérité.

Valeur	1	0	$\frac{1}{2}$
Interprétation	vraie	fausse	possible

- Déterminer les tables de vérité des propositions suivantes : $\overline{P},\ P \vee Q,\ P \wedge Q,\ P \Rightarrow Q$ et $P \Leftrightarrow Q$

Exercice 5

Trois réels a, b et c parmi lesquels, il ya un strictement positif (> 0), un strictement négatif (< 0) et un nul $(= 0)$, sont tels que les trois implications suivantes sont vraies

$$a = 0 \Rightarrow b > 0$$

$$a > 0 \Rightarrow b < 0$$

$$b \neq 0 \Rightarrow c > 0$$

- Quelle est la qualité de chacun de ces nombres.

Exercice 6 $\left(\textit{Négation et valeur de vérité des prédicats}\right)$

Donner la négation et la valeur de vérité des propositions (prédicats) suivantes:

$$P_1 : \exists\, x \in \mathbb{R}, x^2 - 2 = 0 \quad P_2 : x \in [1,2[\quad P_3 : \exists!\, x \in \mathbb{R}, \frac{2x}{x^2+1} = \frac{4}{5}$$

$$Q_1 : \forall\, n \in \mathbb{N}, \frac{n+1}{2} \in \mathbb{N} \qquad Q_2 : \exists\, x \in [0,\pi], \cos x + \sin x = 1$$

$$R_1 : \forall\, x \in \mathbb{R}, \exists\, y \in \mathbb{R} : y^2 = x \qquad R_2 : \exists\, x \in \mathbb{R}, \forall\, y \in \mathbb{R} : y^2 = x$$

Exercice 7 $\left(\textit{Quantificateurs et symboles mathématiques}\right)$

Ecrire à l'aide des quantificateurs et des symboles mathématiques les expressions suivantes:

(1) Le cube de tout réel est positif. (2) Certains réels sont strictement superieurs à leur carré.

(3) Aucun entier naturel est superieur à tous les autres. (4) Entre deux réels il existe au moins un rationnel.

(5) Pour tout réel x, il existe un entier relatif n, tel que x superieur ou égal à n et inférieur strictement à $n+1$.

(6) Il existe un unique entier naturel inferieur stictement à tous les autres entiers naturels.

Exercice 8 $\left(\textit{Raisonnements directs}\right)$

Démontrer les assertions suivantes :

(1) $\forall a,b \in \mathbb{R}, a^2+b^2 = 1 \Rightarrow |a+b| \leq \sqrt{2}$ $\quad(2)$ $\forall x \in \mathbb{R}, |x-1| \leq x^2 - x + 1$

(3) $\forall x,y \in \mathbb{R}, 0 < x \leq 2$ et $0 < y \leq 2 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq 1$

(4) $\forall x \in \mathbb{R}^+, \frac{1}{1+\sqrt{x}} = 1 - \sqrt{x} \Rightarrow x = 0$ $\quad(5)$ $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2+1} + x > 0$

Exercice 9 $(\textit{Contraposée ou absurde})$

(1) Soit $a \in]1,2[$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + ax + 1 \neq 0$

(2) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, (x \neq -5$ et $x \neq -8) \Rightarrow \frac{x+2}{x+5} \neq 2$

(3) $(SUPP)$ Montrer que $\forall x,y \in \mathbb{R}, x \neq y \Rightarrow (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$.

(4) Un rectangle a pour aire $170\ m^2$. Montrer que sa longueur est supérieure à $13m$.

(5) $(SUPP)$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que si n est le carré d'un entier, alors $2n$ n'est pas le carré d'un entier.

Exercice 10 (1) Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes.

$P : (\forall \varepsilon > 0, |a| < \varepsilon) \Rightarrow a = 0 \quad Q : (\exists \varepsilon > 0, |a| \geq \varepsilon)\ OU\ a = 0 \quad R : a \neq 0 \Rightarrow (\exists \varepsilon > 0, |a| \geq \varepsilon)$

(2) Montrer que la proposition R est vraie. En déduire que P et Q sont vraies.

Exercice 11 $\left(\textit{Raisonnements par récurrence}\right)$

(1) Montrer par récurrence que : $\forall x > 0, \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ (1+x)^n \geq 1 + n.x$ (Inégalité de Bernouli)

(2) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on considère la somme $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4}.+\ldots+\frac{1}{n.(n+1)}$

(i) Calculer $S_1,\ S_2,\ S_3$ et S_4.

(ii) Proposer ou conjecturer une formule en n pour S_n. (iii) Démontrer cette formule par récurrence.

Exercice 12 (1) Montrer que tout entier naturel $n \geq 2$ admet un diviseur premier. $(Récurrence)$

(2) Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers.

$\left(Absurde,\ il e xiste\ un\ nombre\ fini\ d'entiers\ premiers,\ p_1, p_2, ...p_n.\ Considérer l'entier\ N = p_1 p_2 ... p_n + 1\right)$

Exercice 13 $\left(\textit{différents types de démonstrations pour un énoncé évident}\right)$

Proposer de l'énoncé suivant divers démonstrations : $P(n)$: $\forall n \in \mathbb{N}$, l'entier $5^n + 1$ est pair.

(i) Par récurrence (ii) Par l'absurde (iii) En utilisant une identité remarquable pour factoriser $5^n - 1$

(iv) En utilisant une méthode distincte des trois précédentes.

N.B exercices: $1,4,5,9,10,11,13$ avec détails exercices: $2,3,6,7,8,12$ quelques indications exercices supplémentaires: pour les étudiants.

Exercices supplémentaires

Exercice 1 A toute proposition A, on associe la variable a définie par

$$\begin{cases} a = 1 & \text{si } A \text{ est vraie} \\ a = 0 & \text{si } A \text{ est fausse} \end{cases}$$

Soient a et b les variables associées à deux propositions A et B, avec la notation
$A \Leftrightarrow B$ et $a = b$ sont synonymes.
Quelles sont les valeurs associées aux propositions $\overline{A}$, $A \vee B$, $A \wedge B$, $A \Rightarrow B$ et $A \Leftrightarrow B$

Exercice 2 Montrer que : (i) $\forall x \in \mathbb{R},\ x + \dfrac{1}{x} \geq 2.$ (ii) $\forall x, y \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1} = 2 \Rightarrow x = y = 0$
(iii)Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sqrt{x^2+1} = 2x$.

Exercice 3 Montrer que les propositions suivantes sont fausses.
(i) $\forall x \in [0,1], x^2 \geq x$ (ii) $\forall x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 \geq x + y$ (iii) $\forall a, b \in \mathbb{R}, \sqrt{a^2+b^2} = a + b$
(iv) La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x$, n'est ni paire ni impaire.
(v) $\forall\ n \in \mathbb{N}$, l'entier $n^2 + n + 11$ est premier.

Exercice 4 Déterminer deux irrationnels a et b tels que a^b soit rationnel.
(Penser aux irrationnels $\sqrt{2}$ ou $\sqrt{3}$ par exemple et utiliser une déonstration par disjonction des cas).

Exercice 5 Soient n et p des entiers naturels avec $n > p$.
Montrer que : $n.p$ est un entier pair OU $n^2 - p^2$ est un multiple de 8.

Exercice 6 Montrer par récurrence que
(1) $\forall\ n \in \mathbb{N},\ n^2 < 3^n.$ $\big($Indication : $\forall\ n \geq 2,\ n^2 \geq 2n$ et $n^2 > 1\big)$.
(2) $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}.+\ldots+\frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}.$

Exercice 7 Montrer par récurrence que
(i) $\forall n \in \mathbb{N},\ 4^n + 6n - 1$ est divisible par 9.
(ii) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Exercice 8
On dit que trois entiers naturels a, b et c forment un triplet Pythagorien s'ils satisfont la relation : $a^2 + b^2 = c^2$.
(1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $2n$, $n^2 - 1$ et $n^2 + 1$ forment un triplet Pythagorien.
(2) 20 et 21 sont deux nombre d'un triplet phytarorien. Trouver le troisième.

Exercice 9 (Divisibilité par 37)
Montrer que tous les entiers naturels du type suivant sont toujours divisibles par 37:
- nombres à 3 chiffres identiques $(n = aaa)$
- nombres à 6 chiffres identiques $(n = aaaaaa)$
- nombres écrits en juxtaposant trois fois deux chiffres donnés $(n = ababab)$

Exercice 10 Soient $x_1,\ x_2, \ldots x_n \in [0,\ 1]$.
Montrer par récurrence que :$\forall\ n \geq 1,\ \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (1 - x_k) \geq 1 - \sum_{k=1}^{n} x_k.$