Université de Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année Universitaire 2022/2023
Durée : 01 h 30min
1ère Année LMD-MI

Rattrapage de Mécanique

Exercice 1 : 05 Pts

Les coordonnées x et y d'un point mobile M dans le plan (oxy) varient avec le temps t selon les relations suivantes : $x = t^2 - 1$, $y = 2t$

Trouver :

1. L'équation de la trajectoire.
2. Les composantes de la vitesse et son module.
3. Les composantes de l'accélération et son module.
4. La nature du mouvement.
5. Les accélérations tangentielle et normale.
6. Le rayon de courbure.

Exercice 2: 05 Pts

Le son émis par le fil d'une guitare se caractérise par sa **fréquence f.** cette fréquence est en fonction de **la force F** de la tension du fil, de **la longueur L** et de **la masse volumique ρ** du fil.

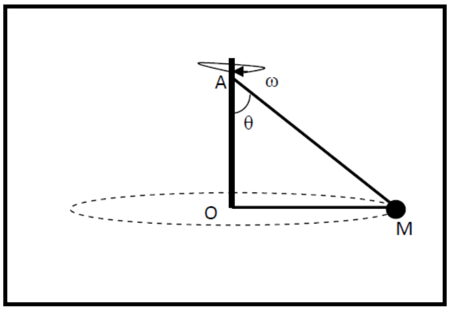
Soit : $\mathbf{f = K\, F^a L^b \rho^c}$ avec K une constante sans dimension.

1- Déterminer la relation de f.
2- Déterminer l'expression de **l'incertitude relative** $\Delta f/f$ en fonction de ΔF, ΔL et $\Delta \rho$.
3- Déduire l'incertitude absolue Δf.

Exercice 3 :04 pts

Une balle de masse m est attachée par deux fils (Am et Om) à un poteau vertical. Tout le système tourne avec une vitesse angulaire ω constante autour de l'axe du poteau

(on connait g l'accélération de la pesanteur, θ et $L = |\overline{OM}|$)

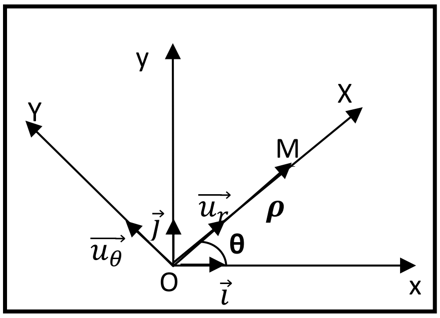


1- En supposant ω suffisamment grande pour maintenir les deux fils tendus, trouver la force (tension du fil) que chaque fil exerce sur la balle

Exercice 4 :06 pts

A) Un point matériel M est repéré par ses coordonnées cartésiennes (x,y).

1. Ecrire x et y en fonction des coordonnées polaires ρ et θ.
2. Donner l'expression des vecteurs unitaires $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$ en fonction des vecteurs unitaires $\vec{i}$ et $\vec{j}$.



B) Le point M se déplace sur l'axe (OX), d'un repère (OXYZ) qui tourne avec une vitesse angulaire ω constante autour de l'axe (Oz) dans le plan (Oxy) tel que $\overrightarrow{\boldsymbol{OM}} = \boldsymbol{t^2 \overrightarrow{u_r}}$ **.**

- Calculer la vitesse relative $\overrightarrow{v_r}$ et la vitesse d'entrainement $\overrightarrow{v_e}$ et déduire la vitesse absolue $\overrightarrow{v_a}$.
- Calculer l'accélération relative $\overrightarrow{a_r}$ l'accélération d'entrainement $\overrightarrow{a_e}$ et l'accélération de Coriolis $\overrightarrow{a_c}$ et déduire l'accélération absolue $\overrightarrow{a_a}$.

Bon courage

Université de Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année Universitaire 2022/2023
Durée : 01 h 30min
1ère Année LMD-Math

Corrigé du rattrapage de Mécanique

Exercice 1: (05 pts)

1- **L'équation de la trajectoire 0.5 pts**

Nous avons x(t) $=t^2-1$ et y = 2t donc t=y/2 (0.25pts)

Donc x=(y/2)^2-1 $\Rightarrow x=\frac{y^2}{4}-1$ (0.25pts)

2- **Les composantes de la vitesse et son module 0.75 pts**

$$\begin{cases} v_x=\frac{dx}{dt} \\ v_y=\frac{dy}{dt} \end{cases} \quad (0.25pts) \Rightarrow \begin{cases} v_x=2t \\ v_y=2 \end{cases} \quad (0.25pts)$$

Le module de la vitesse :

$$\vec{v}=2t\,\vec{i}+2\vec{j} \Rightarrow |\vec{v}|=v=\sqrt{4t^2+4} \quad (0.25pts)$$

3- **les composantes de l'accélération et son module 0.75 pts**

$$\begin{cases} a_x=\frac{dv_x}{dt} \\ a_y=\frac{dv_y}{dt} \end{cases} \quad (0.25pts) \quad \Rightarrow \begin{cases} a_x=2 \\ a_y=0 \end{cases} \quad (0.25pts)$$

$$\vec{a}=2\vec{i} \Rightarrow |\vec{a}|=a=2\ m/s^2 \quad (0.25pts)$$

4- **La nature du mouvement 0.5 pts**

$\vec{a}.\vec{v}=2t\,.\,2=4t>0$ (0.25pts) $\Rightarrow$ Le mouvement est uniformément accéléré.(0.25pts)

5- **les accélérations normale et tangentielle**

- **L'accélération tangentielle 01 pts**

$$a_T=\frac{d|\vec{v}|}{dt}(0.25pts) \Rightarrow a_T=\frac{d\left(\sqrt{4t^2+4}\right)}{dt}=\frac{4t}{\sqrt{4t^2+4}}=\frac{4t}{v} \quad (0.75pts)$$

- **L'accélération normale 01 pts**

Nous avons $a^2=a_T^2+a_N^2$ donc $a_N^2=a^2-a_T^2$ (0.5pts)

$$a_N^2=4-\frac{16\,t^2}{4t^2+4} \Rightarrow a_N^2=\frac{16}{v^2} \Rightarrow a_N=\frac{4}{v} \quad (0.5pts)$$

6- **Le rayon de courbure 0.5 pts** $a_N=\frac{v^2}{R}(0.25pts) \Rightarrow R=\frac{v^2}{a_N}=\frac{v^3}{4}(0.25pts)$

Université de Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année Universitaire 2022/2023
Durée : 01 h 30min
1ère Année LMD-Math

Exercice 2 : 05 pts

1- l'expression de la fréquence f **: (3,5 pts)**

$$\begin{cases} [\mathbf{f}] = \mathbf{T^{-1}} \ (0.25\text{pts}) \\ [F] = [\mathbf{m}][\mathbf{a}] = \mathbf{MLT^{-2}} (0.25\text{pts}) \\ [\mathbf{L}] = \mathbf{L} \ (0.25\text{pts}) \\ [\,\rho] = \dfrac{[\mathbf{m}]}{[\mathbf{V}]} = \mathbf{ML^{-3}} (0.25\text{pts}) \\ [\mathbf{K}] = \mathbf{1} (0.25\text{pts}) \end{cases}$$

On considère que la formule est homogène

$[\mathbf{f}] = [\mathbf{K}][\mathbf{F}]^{\mathbf{a}}[\mathbf{L}]^{\mathbf{b}}[\boldsymbol{\rho}]^{\mathbf{c}}$ (0.25pts)

$\mathbf{T^{-1}} = (\mathbf{MLT^{-2}})^{a}(\mathbf{L})^{b}(\mathbf{ML^{-3}})^{c}$

$\mathbf{T^{-1}} = \mathbf{M^{a+c}\,L^{a+b-3c}\,T^{-2a}}$ (0.25pts)

Par identification on a

$$\begin{cases} \mathbf{a} + c = 0 \ (0.25\text{pts}) \\ \mathbf{a + b - 3c = 0} \quad (0.25\text{pts}) \\ -1 = -2a \ (0.25\text{pts}) \end{cases} \quad \textbf{donc} \quad \begin{cases} \mathbf{a} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} (0.25\text{pts}) \\ \mathbf{b = -2} \quad (0.25\text{pts}) \\ \mathbf{c} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} (0.25\text{pts}) \end{cases}$$

$\mathbf{f} = \mathbf{KF^{\frac{1}{2}}L^{-2}\boldsymbol{\rho}^{-\frac{1}{2}}}$ **Ou bien** $\mathbf{f} = \frac{\mathbf{K}}{\mathbf{L^2}}\sqrt{\frac{\mathbf{F}}{\boldsymbol{\rho}}}$ (0.25pts)

2- **L'incertitude relative** Δf/f en fonction de ΔF, ΔL et Δ ρ.**(1 pt)**

Méthode logarithmique :

$logf = \frac{1}{2}logF - \frac{1}{2}log\rho - 2logL$ (0.25pts)

$$\frac{df}{f} = \frac{dF}{2F} - \frac{d\rho}{2\rho} - 2\frac{dL}{L} \quad (0.25\text{pts})$$

$$\frac{\Delta f}{f} = \left|\frac{\Delta F}{2F}\right| + \left|-\frac{\Delta\rho}{2\rho}\right| + \left|-2\frac{\Delta L}{L}\right| = \frac{\Delta F}{2F} + \frac{\Delta\rho}{2\rho} + 2\frac{\Delta L}{L} \ (0.5\text{pts})$$

3- **L'incertitude absolue** Δf **(0,5pts)**

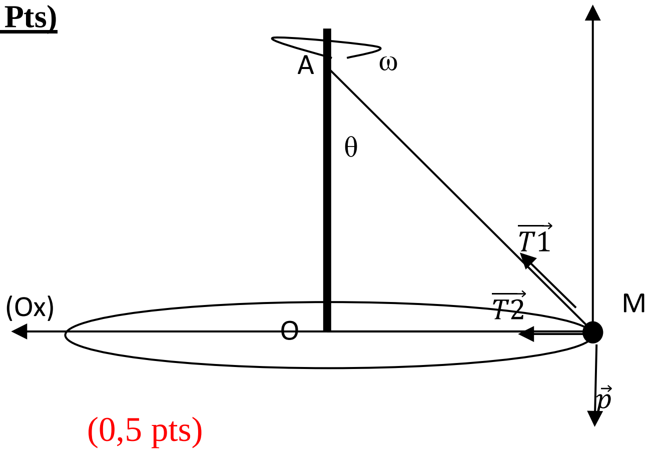
$$\Delta f = f\left(\frac{\Delta F}{2F} + \frac{\Delta\rho}{2\rho} + 2\frac{\Delta L}{L}\right) = \mathrm{KF^{\frac{1}{2}}L^{-2}\rho^{-\frac{1}{2}}}\left(\frac{\Delta F}{2F} + \frac{\Delta\rho}{2\rho} + 2\frac{\Delta L}{L}\right) (0.5\text{pts})$$

$$\Delta f = K\frac{1}{2}F^{\frac{-1}{2}}L^{-2}\rho^{\frac{-1}{2}}\Delta F + K\frac{1}{2\rho}F^{\frac{1}{2}}L^{-2}\rho^{\frac{-3}{2}}\Delta\rho + 2KF^{\frac{1}{2}}L^{-3}\rho^{\frac{-1}{2}}\Delta L$$

Université de Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année Universitaire 2022/2023
Durée : 01 h 30min
1ère Année LMD-Math

Exercice 3 (03 Pts)



(0,5 pts)

1-Trouvons la force (tension du fil) que chaque fil exerce sur la boule **(2,5 pts)**
D'après le principe fondamental de la dynamique

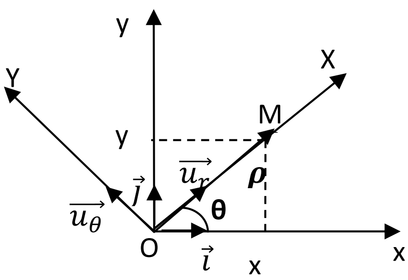
$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{p} + \vec{T_1} + \vec{T_2} = m\vec{a}$ (0,5 pts)
Le mouvement de la boule est circulaire donc l'accélération dans ce cas est l'accélération normale a_N qui est dirigé vers le centre du cercle (avec $a_N = v^2/R$) (0,25 pts)
On choisit le repère tel que
(Ox) est suivant l'accélération normale et il est dirigé vers le centre du cercle
(Oy) est perpendiculaire à (Ox)

Sur (Ox) $T_2 + T_1 \sin\theta = m\, a_N \Rightarrow T_2 + T_1 \sin\theta = m\frac{v^2}{R}$ (0,25 pts)

Sur (Oy) $p - T_1 \cos\theta = 0 \Rightarrow mg = T_1 \cos\theta$ (0,25 pts)
Donc $T_1 = \frac{mg}{cos\theta}$(0,25 pts)
$T_2 = m\frac{v^2}{R} - T_1 \sin\theta = m\frac{v^2}{R} - \frac{mg}{cos\theta} \sin\theta$ (0,5 pts)
Donc $T_2 = m\frac{v^2}{R} - m\, g\, tg\, \theta$ (0,5 pts)

Exercice 4 : 07 Pts

A. Les relations de passage entre les coordonnées polaires et les coordonnées cartésiennes (x et y en fonction de ρ et θ et $\vec{u_\rho}$et $\vec{u_\theta}$ e(0,25 pts)n fonction de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$) (**03 Pts)**



1. La relation entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées polaires.
$\begin{cases} x = rcos\theta \\ y = rsin\theta \end{cases}$ (01 pt)
2. L'expression des vecteurs unitaires $\vec{U_r}$ et $\vec{U_\theta}$ en fonction des vecteurs unitaires$\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.

$\vec{OM}/pol = \rho\vec{U_r}$ (0,5 pts)
$\vec{OM}/cart = x_M\vec{\imath} + y_M\vec{\jmath} = \rho(\cos\theta\vec{\imath} + \sin\theta\vec{\jmath})$ (0,5 pts)

Par identification $\begin{cases} \vec{U_r} = cos\theta\vec{\imath} + sin\theta\vec{\jmath} \\ \vec{U_\theta} = \frac{d\vec{U_r}}{d\theta} = -sin\theta\vec{\imath} + cos\theta\vec{\jmath} \end{cases}$ (01 pt)

B . $\boldsymbol{\vec{OM} = t^2\vec{u_r}}$

Calculons la vitesse relative, d'entrainement et absolue (02 Pts)

- Vitesse relative :

$\overrightarrow{v_r} = \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}/(OXY)$ (0,25 pts) $= \frac{d(t^2)}{dt}\overrightarrow{U_r} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} = 2t\overrightarrow{U_r}$ (0,25 pts)

- Vitesse d'entrainement :

$\overrightarrow{v_e} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{O'M}$(0,25 pts)

$\overrightarrow{OO'} = \vec{0}$ (0,25 pts)donc $\overrightarrow{v_e} = \vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{O'M}$

$$\vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{O'M} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{U_x} & -\overrightarrow{U_y} & \overrightarrow{U_z} \\ 0 & 0 & \omega \\ \boldsymbol{t^2} & 0 & 0 \end{vmatrix} = -(-\omega\boldsymbol{t^2})\,\overrightarrow{U_y}$$ Donc $\overrightarrow{v_e} = \omega\,\boldsymbol{t^2}\,\overrightarrow{U_y}$ (0,5 pts)

- Vitesse absolue :

$\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_r} + \overrightarrow{v_e}$(0,25 pts) $= 2t\overrightarrow{U_x} + \omega\,\boldsymbol{t^2}\,\overrightarrow{U_y}$ (0,25 pts)

Calculons l'accélération relative, d'entrainement, de Coriolis et absolue (02 Pts)

L'accélération relative

$\overrightarrow{a_r} = \frac{d\overrightarrow{v_r}}{dt}/(R')$(0,25 pts) avec $\overrightarrow{v_r} = 2t\overrightarrow{U_x}$ Donc $\overrightarrow{a_r} = 2\overrightarrow{U_x}$ (0,25 pts)

L'accélération d'entrainement

$\overrightarrow{a_e} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \vec{\omega}\Lambda(\vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{O'M}) + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\Lambda\overrightarrow{O'M}$ (0,25 pts)

$\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} = \vec{0}$, $\frac{d\vec{\omega}}{dt}\Lambda\overrightarrow{O'M} = \vec{0}$ car ω constante (0,25 pts)

Et $\vec{\omega}\Lambda(\vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{O'M}) = \vec{\omega}\Lambda\omega t^2\overrightarrow{U_y} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{U_x} & \overrightarrow{U_y} & \overrightarrow{U_z} \\ 0 & 0 & \omega \\ 0 & \omega t^2 & 0 \end{vmatrix} = -\omega^2 t^2\overrightarrow{U_x}$ (0,25 pts)

Donc $\overrightarrow{a_e} = -\omega^2 t^2\overrightarrow{U_x}$

L'accélération de Coriolis

$\overrightarrow{a_c} = 2\vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{v_r}$(0,25 pts) $= 2\begin{vmatrix} \overrightarrow{U_x} & \overrightarrow{U_y} & \overrightarrow{U_z} \\ 0 & 0 & \omega \\ 2t & 0 & 0 \end{vmatrix} = 4t\omega\overrightarrow{U_y}$ (0,25 pts)

L'accélération absolue

$\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_r} + \overrightarrow{a_c} + \overrightarrow{a_e} = 2\overrightarrow{U_x} - \omega^2 t^2\overrightarrow{U_x} + 4t\omega\overrightarrow{U_y}$ (0,25 pts)

Alors$\overrightarrow{a_a}$=$(2 - \omega^2 t^2)\overrightarrow{U_x} + 4t\,\omega\overrightarrow{U_y}$