Université Aboubekr Belkaïd Tlemcen *A.U. 2022/2023*
Faculté des Sciences / Département de Mathématiques / L1 mathématiques

Rattrapage d'ANALYSE 1

25 juin 2023 / Durée $1h30$

Documents et matériel électroniques interdits

A : [**4 pts**]

Soit $(U_n)_{n\geq 0}$ la suite numérique réelle définie par récurrence par

$$\begin{cases} U_0 = 1, \\ U_{n+1} = \dfrac{4U_n}{1+U_n}, \; n \geq 0. \end{cases}$$

a) Montrer que

$$\forall n \in N, \; 0 < U_n < 3.$$

b) Montrer que $(U_n)_{n\geq 0}$ est strictement monotone.

c) En déduire que $(U_n)_{n\geq 0}$ est convergente et calculer sa limite.

B : [**3 pts**]

A l'aide de la règle d'encadrement, montrer que la suite de terme général $\frac{n+4\sin n}{n+\cos n}$ est convergente et calculer sa limite.

C : [**3 pts**]

Montrer que l'équation $3x = e^x$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0,1]$ en justifiant votre réponse.

D : [**4 pts**]

a) Calculer la limite suivante pour $a \neq \sqrt{2}$.

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+1} - a}{x-1}.$$

b) Etudier la prolongeabilité par continuité en 1 de la fonction $\dfrac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{x-1}$

[**Ne pas utiliser des dérivées dans votre calcul**]

E : [**3 pts**]

Existe-il une valeur du paramètre réel c pour lequel la fonction suivante est continue dans R ?

$$f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$$
$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} \frac{5x^2+\pi}{2}, & \text{si } x \leq 0, \\ \sin(x-c), & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

F : [**3 pts**]

Etudier la parité de la fonction

$$f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$$
$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} -x^2 - x, & \text{si } x \geq 0, \\ -x^2 + x, & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Corrigé de l'épreuve de rattrapage d'Analyse 1, A.U 2022/2023

A) [4 points]

a) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

- $\underline{n=0}$: $0 < U_0 = 1 < 3$. ✓ (0,25)
- Hypothèse de récurrence (H.R) : Supposons que jusqu'à un certain ordre n, $0 < U_n < 3$. Montrons alors que $0 < U_{n+1} < 3$.

D'une part, $U_{n+1} = \dfrac{4U_n}{1+U_n}$, avec $U_n > 0$ par (HR), (0,25)

donc $U_{n+1} > 0$.

D'autre part, $U_{n+1} - 3 = \dfrac{4U_n}{1+U_n} - 3 = \dfrac{U_n - 3}{1+U_n}$ (0,5)

comme $1+U_n > 0$ et $U_n - 3 < 0$ par (HR), (0,25)

alors $U_{n+1} < 0$.

- $\underline{\underline{Cl.}}$ $\underline{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < U_n < 3}$ (0,25)

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} - U_n = \dfrac{4U_n}{1+U_n} - U_n = \dfrac{3U_n - U_n^2}{1+U_n}$

$= \dfrac{U_n(3-U_n)}{1+U_n}$. Comme $U_n > 0$, $3 - U_n > 0$ (a) (0,5)

alors $U_{n+1} - U_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (0,25)

c.à.d que $\underline{\underline{(U_n)_{n\geq 0} \text{ est strictement croissante.}}}$ (0,25)

c) $(U_n)_{n\geq 0}$ est croissante et majorée, donc elle est convergente. Soit $\ell = \lim_{n\to+\infty} U_n$.

$$U_{n+1} = \frac{4U_n}{1+U_n} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} U_{n+1} = \lim \frac{4U_n}{1+U_n}$$

$\Leftrightarrow \ell = \dfrac{4\ell}{1+\ell}$ (opérations sur les limites)

$\Leftrightarrow \ell + \ell^2 = 4\ell \Leftrightarrow \ell^2 - 3\ell = 0$

$\Leftrightarrow \ell(\ell-3) = 0 \Leftrightarrow \ell = 0$ ou $\ell = 3$. 0,5

Comme $U_0 = 1 \in]0,3[$ et (U_n) est croissante, alors forcément $\ell = 3$.

cl. $\lim_{n\to+\infty} U_n = 3$. 0,5

B) [3 pts] Soit $U_n = \dfrac{n+4\sin n}{n+\cos n}$

• $-1 \leq \sin n \leq 1 \Leftrightarrow -4 \overset{(c)}{\leq} 4\sin n \leq 4$ 0,5

$\Leftrightarrow n-4 \overset{(d)}{\leq} n+4\sin n \overset{(a)}{\leq} n+4 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

• $-1 \leq \cos n \leq 1 \Leftrightarrow n-1 \overset{(b)}{\leq} n+\cos n \leq n+1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ 0,5

Pour majorer la fraction $\frac{n+4\sin n}{n+\cos n}$, on majore le numérateur et on minore le dénominateur.

D'où $U_n = \dfrac{n+4\sin n}{n-\cos n} \leqslant \dfrac{n+4}{n-1}$ | d'après (a) et (b) $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$

De même, pour minorer la fraction U_n, on minore le numérateur et on majore le dénominateur

d'où $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad \dfrac{n-4}{n+1} \leqslant U_n = \dfrac{n+4\sin n}{n-\cos n}$

d'après (c) et (d).

En définitive, on a l'encadrement suivant

$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ $\quad \dfrac{n-4}{n+1} \leqslant U_n \leqslant \dfrac{n+4}{n-1}$ $\qquad$ 0,5 + 0,5

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n-4}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+4}{n-1} = \underline{\underline{1}}$ $\qquad$ 0,5

alors $\underline{(U_n)_n \text{ est convergente}}$ et $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 1}$. $\qquad$ 0,5

c) [3 pts]

Soit $f(x) := 3x - e^x$, $x \in [0,1]$.

- f est continue dans $[0,1]$ (fcts usuelles) $\qquad$ 0,5
- $f(0) = 0 - e^0 = -1 < 0$ $\qquad$ 0,5

  $f(1) = 3 - e > 0$ $\qquad$ 0,5

D'après le théorème des valeurs intermédiaires (verbos), $\exists\, c \in \,]0,1[$ tel que $f(c) = 0$. $\qquad$ 0,5

De plus $f'(x) = 3 - e^x$.

si $0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq e^x \leq e$

$\Leftrightarrow -e \leq -e^x \leq -1$

$\Leftrightarrow \underbrace{3-e}_{>0} \leq 3 - e^x \leq 2$ d'où $f'(x) = 3 - e^x > 0$ $\forall x \in [0,1]$

c.à.d que f est strictement croissante sur $[0,1]$

d'où il existe une unique racine de f dans $[0,1]$, c.à.d que l'équation $3x = e^x$ admet une unique solution dans $]0,1[$.

1,50

2) [4 pts]

a) $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x+1} - a}{x-1} = (\sqrt{2} - a) \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{x-1} \\ a \neq \sqrt{2} \end{cases}$. On a $\sqrt{2} - a \neq 0$

Comme $\lim\limits_{x \underset{<}{\to} 1} \dfrac{1}{x-1} = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \underset{<}{\to} 1} \dfrac{\sqrt{x+1} - a}{x-1}$

$= \underbrace{\mathrm{Sgn}(\sqrt{2}-a)}_{\text{Signe de } \sqrt{2}-a} . (-\infty)$

1

et comme $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 1} \dfrac{1}{x-1} = +\infty$,

alors $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 1} \dfrac{\sqrt{x+1} - a}{x-1} = \mathrm{Sgn}(\sqrt{2}-a)(+\infty)$

1

Les limites à droite et à gauche de 1 sont donc infinies mais jamais du même signe.

b) $f : \mathbb{R}\setminus\{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto y = \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}.$$

- f est continue comme opérations de fcts continues.
- Pour que f soit prolongeable par continuité en $x=1$, il faut et il suffit que $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ \neq}} f(x)$ existe et soit finie. 0,5

Or $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ \neq}} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}$ est une forme indéterminée $\left(\frac{0}{0}\right)$. 0,5

On lève l'indétermination en multipliant et en divisant par le conjugué de $\sqrt{x+1}-\sqrt{2}$.

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ \neq}} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ \neq}} \frac{(x+1)-2}{(x-1)(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})} = \lim_{\substack{x\to 1\\ \neq}} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 1\\ \neq}} \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$ 1

d'où le prolongement

$$\tilde{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto y = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 1 \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \text{si } x = 1 \end{cases}$$ (Continue)

E) [3 pts]

En dehors de $x=0$, f est continue comme opérations de fonctions continues. (0,5)

S'il y a discontinuité, ce ne peut être qu'en 0.

$f(0) = \frac{5\cdot 0^2+\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ (0,5)

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \sin(x-c) = \sin(-c)$ (0,5)

Mais, $\forall c \in \mathbb{R}$ $-1 \leq \sin(-c) \leqslant 1$

et $f(0) = \frac{\pi}{2} > 1$. (0,75)

Donc il n'existe aucune valeur de c assurant la continuité en 0. (0,75)

F) [3 pts].

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -f(x)$ ou $f(x)$ ou aucun des deux ?

Si $x \geqslant 0$, $-x \leq 0$ d'où $f(-x) = -(-x)^2+(-x)$ d'après la déf. de f

i.e. $f(-x) = -x^2-x$ si $x\geqslant 0$ (1,25)

Si $x \leq 0$, $-x \geqslant 0$ d'où $f(-x) = -(-x)^2-(-x) = -x^2+x$

i.e $f(-x) = -x^2+x$ si $x \leq 0$ (1,25)

En définitive $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \begin{cases} -x^2-x & \text{si } x\geqslant 0 \\ -x^2+x & \text{si } x\leq 0 \end{cases} = \underline{\underline{f(x)}}$

Donc f est paire. (0,5)