Université Abou Bekr Belkaid - Tlemcen
Faculté des sciences
Département de mathématiques

Année universitaire: 2022 - 2023
Module: Algèbre 1
L1 Math

Examen de rattrapage

Exercice 1 (6 pts)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}$$

(1) Calculer S_1, S_2 et S_3 .

(2) Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$$

(3) En déduire la somme

$$\sum_{k=3}^{8} \frac{k}{2^k}$$

Exercice 2 (8 pts)

Soient f et g deux applications définies par :

$$f : \mathbb{R}\backslash\{3\} \longrightarrow \mathbb{R}\backslash\{4\} \quad x \longmapsto \frac{4x+1}{x-3} \qquad \text{et} \qquad g : \mathbb{R}\backslash\{4\} \longrightarrow \mathbb{R}\backslash\{3\} \quad x \longmapsto \frac{3x+1}{x-4}$$

(1) Montrer que $\forall y \in \mathbb{R}\backslash\{4\}, \frac{3y+1}{y-4} \neq 3$.

(2) Déterminer pour $x \in \mathbb{R}\backslash\{1, 3\}$ l'image de $3x$ par f et pour $x \in \mathbb{R}\backslash\{-2, 2, 4\}$ l'image de x^2 par g.

(3) Déterminer les antécédents de $y = 1$ par f et par g.

(4) Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$.

(5) Montrer que f est injective.

(6) f est-elle surjective?

(7) f est-elle bijective? Si oui, déterminer f^{-1}.

Exercice 3 (6 pts)

Dans $\mathbb{Z}$, on définit la relation R par :

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} \ : \ aRb \Leftrightarrow 2/a^2 - b^2 \ (2 \text{ divise } a^2 - b^2).$$

(1) Montrer que R est une relation d'équivalence.

(2) Déterminer les classes d'équivalence de 0 et 1 ainsi que l'ensemble quotient $\mathbb{Z}/R$.

Rappel

Pour a entier, on a :

a^2 est pair alors a est pair

a^2 est impair alors a est impair.

BON COURAGE

Université de Tlemcen
Faculté des sciences
Département de mathématiques

A.U : 2022-2023
L1 Math
Algèbre 1

Corrigé de l'examen de rattrapage.

Exercice 1

$n \in \mathbb{N}^*$. $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}$.

① $S_1 = \sum_{k=1}^{1} \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$ → 0,25 , $S_2 = \sum_{k=1}^{2} \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ → 0,25

$S_3 = \sum_{k=1}^{3} \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3}{8} = \frac{11}{8}$. → 0,5

② Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = 2 - \frac{n+2}{2^n}$.

(i) 1ère étape : Initialisation :

$n=1$: $S_1 = \sum_{k=1}^{1} \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2}$, $2 - \frac{1+2}{2^1} = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$ → 0,5

$\Rightarrow S_1 = \sum_{k=1}^{1} \frac{k}{2^k} = 1 - \frac{1+2}{2^1} = \frac{1}{2}$

(ii) 2ème étape : Hérédité :

Supposons que $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$ et montrons que : $S_{n+1} = 2 - \frac{n+3}{2^{n+1}}$ → 0,5

On a : $S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{2^k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} + \frac{n+1}{2^{n+1}} = S_n + \frac{n+1}{2^{n+1}}$ → 0,5

$= 2 - \frac{n+2}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}}$ [hyp. de récurrence] → 0,5

$$S_{n+1} = 2 - \left[\frac{2(n+2)-(n+1)}{2^{n+1}}\right] = 2 - \frac{2n+4-n-1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{n+3}{2^{n+1}}$$

$S_{n+1} = 2 - \frac{n+3}{2^{n+1}}$ → 1

(iii) Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$ → 0,5

③ $\sum_{k=3}^{8} \frac{k}{2^k} = \sum_{k=1}^{8} \frac{k}{2^k} - \sum_{k=1}^{2} \frac{k}{2^k} = S_8 - S_2 = 2 - \frac{8+2}{2^8} - 1$ → 1

$= 1 - \frac{10}{2^8} = 1 - \frac{5}{2^7} = \frac{2^7 - 5}{2^7} = \frac{128-5}{128} = \frac{123}{128}$

$\sum_{k=1}^{8} \frac{k}{2^k} = \frac{123}{128}$ → 0,5

Exercice

$f : \mathbb{R}\setminus\{3\} \longrightarrow \mathbb{R}\setminus\{4\}$
$x \longmapsto f(x) = \dfrac{4x+1}{x-3}$

$g : \mathbb{R}\setminus\{4\} \longrightarrow \mathbb{R}\setminus\{3\}$
$x \longmapsto \dfrac{3x+1}{x-4}$

① $\forall y \in \mathbb{R}\setminus\{4\} : \dfrac{3y+1}{y-4} \neq 3$

Par l'absurde : supposons que $\exists y \in \mathbb{R}\setminus\{4\}\ (y \neq 4) : \dfrac{3y+1}{y-4} = 3$

$\dfrac{3y+1}{y-4} = 3 \Longrightarrow 3y+1 = 3y-12 \Longrightarrow 1 = -12$ impossible

C'est une contradiction. → (0,5)

donc $\forall y \in \mathbb{R}\setminus\{4\},\ \dfrac{3y+1}{y-4} \neq 3$.

② Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\{1,3\}$, l'image de $3x$ par f est $f(3x)$

$f(3x) = \dfrac{4(3x)+1}{(3x)-3} = \dfrac{12x+1}{3x-3} = f(3x)$ → (0,25)

Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\{2,-2,4\}$, l'image de x^2 par g est : $g(x^2)$

$g(x^2) = \dfrac{3(x^2)+1}{(x^2)-4} = \dfrac{3x^2+1}{x^2-4} = g(x^2)$ → (0,25)

③ Les antécédents de $y=1$ par f et g : $f^{-1}(\{1\})$, $g^{-1}(\{1\})$

$f^{-1}(\{1\}) = \{x \in \mathbb{R}\setminus\{3\} : f(x) = 1\}$ → (0,25)

$f(x) = 1 \Longrightarrow \dfrac{4x+1}{x-3} = 1 \Longrightarrow 4x+1 = x-3 \Longrightarrow x = -\dfrac{4}{3}$

d'où $f^{-1}(\{1\}) = \{-\frac{4}{3}\}$ → (0,25)

$g^{-1}(\{1\}) = \{x \in \mathbb{R}\setminus\{4\} : g(x) = 1\}$ → (0,25)

$g(x) = 1 \Longrightarrow \dfrac{3x+1}{x-4} = 1 \Longrightarrow 3x+1 = x-4 \Longrightarrow x = -5/2$

d'où $g^{-1}(\{1\}) = \{-5/2\}$ → (0,25)

④ $g \circ f$ et $f \circ g$:

$g \circ f : \mathbb{R}\setminus\{3\} \longrightarrow \mathbb{R}\setminus\{3\}$ → (0,25)

Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\{3\}$. $g\circ f(x) = g(\underbrace{f(x)}_{t}) = g(t) = \frac{3t+1}{t-4}$ → (0,25)

$$= \frac{3f(x)+1}{f(x)-4} = \frac{3\,\frac{4x+1}{x-3}+1}{\frac{4x+1}{x-3}-4}$$

$$= \frac{3(4x+1)+(x-3)}{(4x+1)-4(x-3)} = \frac{12x+3+x-3}{4x+1-4x+12}$$ → (0,25)

$$= \frac{13x}{13} = x = g\circ f(x)$$

d'où $g\circ f = Id_{\mathbb{R}\setminus\{3\}}$ → (0,25)

· $f\circ g : \mathbb{R}\setminus\{4\} \longrightarrow \mathbb{R}\setminus\{4\}$ → (0,25)

Soit $x\in\mathbb{R}\setminus\{4\}$. $f\circ g(x) = f(\underbrace{g(x)}_{s}) = f(s) = \frac{4s+1}{s-3}$ → (0,25)

$$= \frac{4g(x)+1}{g(x)-3}$$

$$= \frac{4\,\frac{3x+1}{x-4}+1}{\frac{3x+1}{x-4}-3} = \frac{4(3x+1)+(x-4)}{(3x+1)-3(x-4)}$$ → (0,25)

$$= \frac{12x+4+x-4}{3x+1-3x+12} = \frac{13x}{13} = x$$

d'où $f\circ g = Id_{\mathbb{R}\setminus\{4\}}$ → (0,25)

(5) f injective $\Leftrightarrow \left[\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}\setminus\{3\},\ f(x_1) = f(x_2)\right] \Rightarrow x_1 = x_2$ → (0,5)

Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}\setminus\{3\}$ $(x_1 \neq 3,\ x_2 \neq 3)$

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{4x_1+1}{x_1-3} = \frac{4x_2+1}{x_2-3} \Rightarrow (4x_1+1)(x_2-3) = (x_1-3)(4x_2+1)$

$\Rightarrow 4x_1x_2 - 12x_1 + x_2 - 3 = 4x_1x_2 + x_1 - 12x_2 - 3$

$\Rightarrow -13x_1 = -13x_2$

$\Rightarrow x_1 = x_2$

$\Rightarrow f$ est injective. → (0,5)

⑥ f est surjective $\iff \forall y \in \mathbb{R}\setminus\{4\}, \exists x \in \mathbb{R}\setminus\{3\} : y = f(x)$. → (0,5)

Soit $y \in \mathbb{R}\setminus\{4\}$ $(y \neq 4)$

$$y = f(x) = \frac{4x+1}{x-3} \Rightarrow y(x-3) = 4x+1$$

$$\Rightarrow yx - 3y = 4x+1$$

$$\Rightarrow (y-4)x = 3y+1$$

$$\Rightarrow x = \frac{3y+1}{y-4} \quad \text{car } y \neq 4$$ → (0,5)

d'après ①, $\forall y \neq 4$, $\frac{3y+1}{y-4} \neq 3$.

donc $\forall y \in \mathbb{R}\setminus\{4\}, \exists x = \frac{3y+1}{y-4} \in \mathbb{R}\setminus\{3\} : y = f(x)$

par suite f est surjective. → (0,5)

⑦ Comme f est injective et surjective alors f est bijective, et → (0,5)

$$f^{-1} : \mathbb{R}\setminus\{4\} \longrightarrow \mathbb{R}\setminus\{3\}$$ → (0,5)

$$y \longmapsto f^{-1}(y) = \frac{3y+1}{y-4} \qquad [f^{-1} = g].$$ → (0,5)

d'après ⑤, $\exists g : \mathbb{R}\setminus\{4\} \to \mathbb{R}\setminus\{3\}$ tq :

$$g \circ f = Id_{\mathbb{R}\setminus\{3\}} \quad \text{et} \quad f \circ g = Id_{\mathbb{R}\setminus\{4\}}$$

ce qui prouve que f est bijective et $f^{-1} = g$.

Exercice ③ :

Dans $\mathbb{Z}$, on définit la relation R par : $\forall a,b \in \mathbb{Z}$, $aRb \iff 2 \mid a^2 - b^2$.

① Montrons que R est une relation d'équivalence.

ⓘ Réflexivité : $\forall a \in \mathbb{Z}$, aRa. → (0,5)

Soit $a \in \mathbb{Z}$.

Car $a^2-a^2=0=0.2 \Rightarrow \exists k=0\in\mathbb{Z} : a^2-a^2=2.0$

$\Rightarrow 2 \mid a^2-a^2$

$\Rightarrow a \mathcal{R} a$

$\Rightarrow \mathcal{R}$ est réflexive. 0,5

(ii) Symétrie : $\forall a,b\in\mathbb{Z} : a\mathcal{R}b \Rightarrow b\mathcal{R}a$. 0,5

Soient $a,b\in\mathbb{Z}$, on a

$a\mathcal{R}b \Rightarrow 2\mid a^2-b^2 \Rightarrow \exists k\in\mathbb{Z} : a^2-b^2=2k$

$\Rightarrow \exists k\in\mathbb{Z} : b^2-a^2=2(-k)$

$\Rightarrow \exists k'=-k\in\mathbb{Z} : b^2-a^2=2k'$

$\Rightarrow 2\mid b^2-a^2$

$\Rightarrow b\mathcal{R}a$

$\Rightarrow \mathcal{R}$ est symétrique. 0,5

(iii) Transitivité : $\forall a,b,c\in\mathbb{Z}$, $a\mathcal{R}b$ et $b\mathcal{R}c \Rightarrow a\mathcal{R}c$ 0,5

Soient $a,b,c\in\mathbb{Z}$.

$\begin{cases} a\mathcal{R}b \\ b\mathcal{R}c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\mid a^2-b^2 \\ 2\mid b^2-c^2 \end{cases} \Rightarrow 2\mid (a^2-b^2)+(b^2-c^2)$

$\Rightarrow 2\mid a^2-c^2$

$\Rightarrow a\mathcal{R}c$.

$\Rightarrow \mathcal{R}$ est transitive. 0,5

Conclusion : Comme $\mathcal{R}$ est réflexive, symétrique et transitive, alors $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. 0,5

(2) $cl(0)$, $cl(1)$ et $\mathbb{Z}/\mathcal{R}$.

$cl(0)=\dot{0}=\{a\in\mathbb{Z},\ a\mathcal{R}0\}$ 0,5

$a\mathcal{R}0 \Rightarrow 2\mid a^2-0^2 \Rightarrow 2\mid a^2 \Rightarrow 2\mid a \Rightarrow a$ est pair

$cl(0) = \dot{0} = \{2k, k \in \mathbb{Z}\} = \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \ldots\}$ — $0,5$

$\dot{1} = cl(1) = \{a \in \mathbb{Z}, a \mathcal{R} 1\}$ — $0,5$

$a \mathcal{R} 1 \Rightarrow 2 \mid a^2 - 1^2 \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, a^2 - 1 = 2k.$

$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, a^2 = 2k+1.$

$\Rightarrow a^2$ est impair

$\Rightarrow a$ est impair — $0,5$

$cl(1) = \dot{1} = \{2k+1, k \in \mathbb{Z}\} = \{\ldots, -3, -1, 1, 3, 5, 7, \ldots\}$

On remarque que $\forall a \in \mathbb{Z}$, soit $a \in cl(0)$, soit $a \in cl(1)$

d'où l'ensemble quotient : $\mathbb{Z}/\mathcal{R} = \{cl(0), cl(1)\} = \{\dot{0}, \dot{1}\}$ — $0,5$