ÉPREUVE FINALE DE MECANIQUE

Questions de cours: (05 pts)

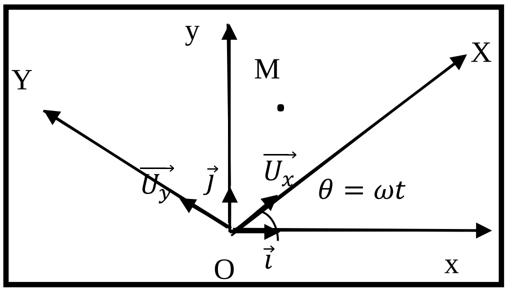
1- Donnez les trois lois de Newton.
2- Quelle est la différence entre une force conservative et une force non conservative (donner des exemples pour chaque cas) et vérifier que la force de rappel du ressort $\vec{T}$ est une force conservative
3- Dans quel cas nous avons une conservation de l'énergie mécanique, et qu'est ce qu'on a dans le cas contraire.
4- Donner l'équation horaire d'une particule qui se déplace sur l'axe (Ox) dans les deux cas suivant
   a- La particule se déplace avec une accélération constante (avec à t=0 : $x=x_0$ et $v=v_0$)
   b- La particule se déplace avec une vitesse constante (avec à t=0 m : $x=x_0$)

Exercice 1 (07 pts) :

Dans le plan Oxy, on considère un système d'axes mobiles (OXY) de même origine O qui tourne autour de (Oz) avec une vitesse angulaire ω constante. Les coordonnées d'un mobile M dans le repère mobile sont $x'=t^2$ et $y'=t$.

Calculer dans le **repère mobile** :

1- La vitesse relative $\vec{v_r}$ et la vitesse d'entrainement $\vec{v_e}$, en déduire la vitesse absolue $\vec{v_a}$.
2- L'accélération relative $\vec{a_r}$, l'accélération d'entrainement $\vec{a_e}$ et l'accélération de Coriolis $\vec{a_c}$, en déduire l'accélération absolue $\vec{a_a}$.



Exercice 2 (08 pts) :

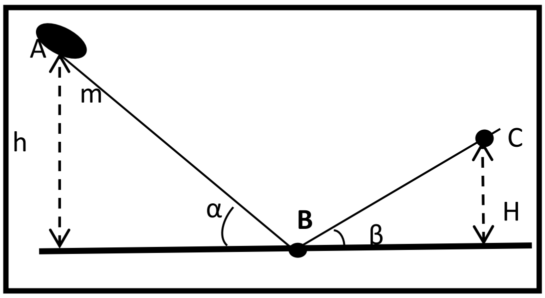
A. Une particule de masse m =0.5kg abandonnée sans vitesse initiale du point A, d'un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontal, avec un coefficient de frottement 0,8 et $g=10\ m/s^2$

1- Que doit être l'angle d'inclinaison (α) pour que le corps puisse descendre
2- Quelle est la force de frottement dans ce cas.

Pour un angle d'inclinaison α =45 et une hauteur h=1m,

3- Calculer la force de réaction normale $\vec{N}$ et la vitesse du bloc au point B

B . Après le passage au point B à la vitesse V_B, la masse remonte le plan incliné BC faisant un angle β= 30°avec l'horizontal, et il s'arrête au point C.
En négligeant les forces de frottement,
Déterminer la distance (BC) parcourue par la particule



Corrigé de l'épreuve finale de Mécanique pour première année MI 2018/2019

Questions de cours (05 pts)

1- Les trois lois de Newton : 1.5 pts

Première loi de Newton ou principe d'inertie:

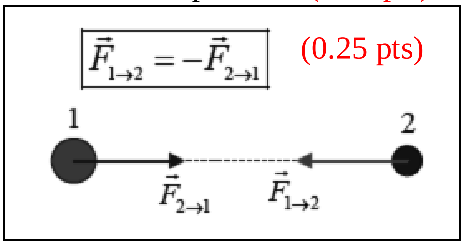
Si le corps matériel n'est soumis à aucune force:
- s'il est au repos, il reste au repos (0.25 pts)
- s'il est en mouvement, ce mouvement ne peut être que rectiligne uniforme (0.25 pts)

Deuxième loi de Newton ou principe fondamentale de la dynamique (P.F.D):

La résultante des forces exercées sur un corps est égale au produit de sa masse et son accélération. $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ (0.5pts)

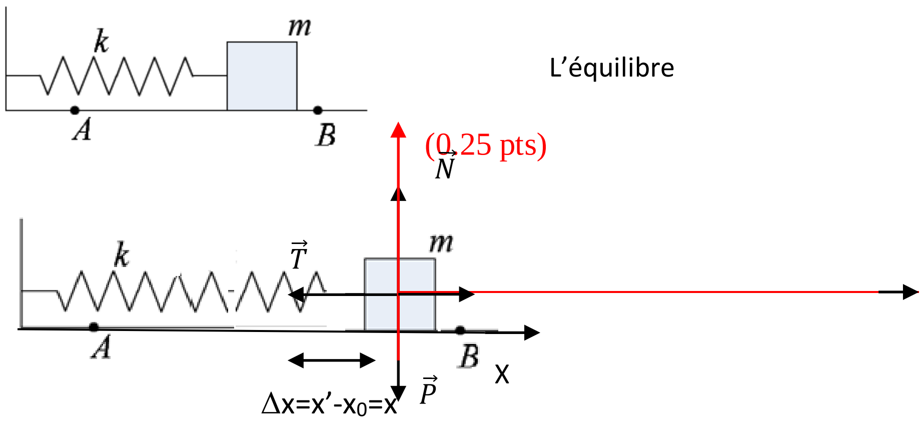
Troisième loi de Newton ou principe de l'action et la réaction:

Lorsque deux corps interagissent, la force exercée par le premier sur le second est égale et opposée à celle exercée par le second sur le premier (0.25 pts)



2- La différence entre une force conservative et une force non conservative : 1.75pts

- Une force est dite conservative si son travail ne dépend pas du chemin suivi et on dit qu'elle dérive d'un potentiel (0.25 pts)
  Exemples : Force de pesanteur, le poids, force de rappel du ressort. (0.5 pts)
- Une force est dite non conservative si son travail dépend du chemin suivi (0.25 pts) comme le force de frottement. (0.25 pts)
- La force du rappel du ressort est une force conservative



$dW = \vec{F}.\vec{dl}$ avec $\vec{F} = \vec{T} = -kx\,\vec{\imath}$

$\vec{dl} = dx\vec{\imath}$ donc $dW = -kxdx$ (0.25 pts)

$W = -k\int_{x_1}^{x_2} xdx = -\frac{1}{2}kx^2h$ (0.25 pts)

3- Nous avons : 1pt

La conservation de l'énergie mécanique si les forces sont conservatives (0.25 pts). Dans ce cas $E_M = E_C + Ep = Cte$ donc $\Delta EM = 0$ (0.25 pts)

Et entre deux points A et B : $E_M(A)= E_M(B)$
Dans le cas de la présence de frottements (forces non conservatives) (0.25 pts)
$\Delta E_M=\sum Wfrott$ (0.25 pts)

4- **L'équation de la trajectoire dans les deux cas :** 1.25 pts

a- La particule se déplace avec une accélération constante (avec à t=0 : $x=x_0$ et $v=v_0$)

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow \int_{v_0}^{v} dv = a\int_0^t d\,t$$

$\Rightarrow \boldsymbol{v - v_0 = a\,t}$ (1) Donc $\vec{\boldsymbol{v}} = (\boldsymbol{a\,t + v_0})\vec{\boldsymbol{\imath}}$

L'équation de la trajectoire

$$v = \frac{dx}{dt} = a\,t + v_0 \quad \Rightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t (a\,t + v_0)d\,t = a\int_0^t td\,t \; + v_0\int_0^t d\,t$$

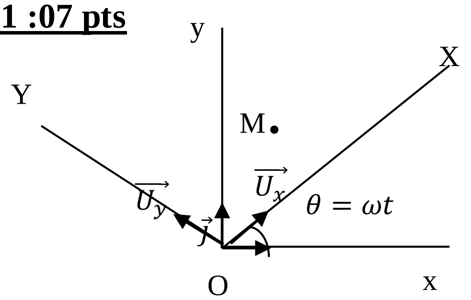
$\Rightarrow x - x_0 = \left[a\frac{t^2}{2} + v_0 t\right]_0^t$ donc $\boldsymbol{x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0}$ (0.75 pts)

b- La particule se déplace avec une vitesse constante (avec à t=0 m : $x=x_0$)

$$v = \frac{dx}{dt} = v_0 \quad \Rightarrow \int_{x_0}^{x} dx = v_0\int_0^t dt$$

$\Rightarrow x - x_0 = [v_0 t]_0^t$ donc $\boldsymbol{x = v_0 t + x_0}$ (0.5 pts)

Exercice 1 :07 pts



Les coordonnées du point M dans le repère mobile M(t^2, t)/(R') Donc $\overrightarrow{OM}$ s'écrit :

$\overrightarrow{OM} = t^2\overrightarrow{U_x} + t\overrightarrow{U_y}$ (0.5 pts)

La vitesse relative

$\overrightarrow{v_r} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}/(R')$ (0.5 pts)avec$\overrightarrow{OM} = t^2\overrightarrow{U_x} + t\overrightarrow{U_y}$

Donc $\overrightarrow{v_r} = 2t\overrightarrow{U_x} + \overrightarrow{U_y}$(0.25 pts)

La vitesse d'entrainement :

$\overrightarrow{v_e} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{O'M}$ (0.5 pts) avec $\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} = \vec{0}$ (0.25 pts)

$\vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{OM} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{U_x} & \overrightarrow{U_y} & \overrightarrow{U_z} \\ 0 & 0 & \omega \\ t^2 & t & 0 \end{vmatrix} = -\omega t\overrightarrow{U_x} + \omega t^2\overrightarrow{U_y}$ (0.5 pts) $Donc\ \overrightarrow{v_e} = \omega t\overrightarrow{U_x} + \omega t^2\overrightarrow{U_y}$(0.25 pts)

La vitesse absolue

$\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_r} + \overrightarrow{v_e} = 2t\overrightarrow{U_x} + \overrightarrow{U_y} - \omega t\overrightarrow{U_x} + \omega t^2\overrightarrow{U_y}$ (0.5 pts)

$\Rightarrow \overrightarrow{v_a} = (-\omega t + 2t)\overrightarrow{U_x} + (\omega t^2 + 1)\overrightarrow{U_y}$ (0.25 pts)

L'accélération relative

$\overrightarrow{a_r} = \frac{d\overrightarrow{v_r}}{dt}/(R')$ (0.5 pts)avec$\overrightarrow{v_r} = 2t\overrightarrow{U_x} + \overrightarrow{U_y}$ Donc $\overrightarrow{a_r} = 2\overrightarrow{U_x}$ (0.25 pts)

L'accélération d'entrainement

$\overrightarrow{a_e} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \vec{\omega}\Lambda\left(\vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{O'M}\right) + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\Lambda\overrightarrow{O'M}$ (0.5 pts)

$\frac{d\vec{\omega}}{dt}\Lambda\overrightarrow{O'M} = \vec{0}$car ω constante et $\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} = \vec{0}$ (0.25 pts)

et$\vec{\omega}\Lambda\left(\vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{O'M}\right) = \vec{\omega}\Lambda\left(-\omega t\overrightarrow{U_x} + \omega t^2\overrightarrow{U_y}\right) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{U_x} & \overrightarrow{U_y} & \overrightarrow{U_z} \\ 0 & 0 & \omega \\ -\omega t & \omega t^2 & 0 \end{vmatrix} = -\omega^2 t^2\overrightarrow{U_x} - \omega^2 t\overrightarrow{U_y}$

Donc $\overrightarrow{a_e} = -\omega^2 t^2\overrightarrow{U_x} - \omega^2 t\overrightarrow{U_y}$ (0.5 pts)

L'accélération de Coriolis

$\overrightarrow{a_c} = 2\vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{v_r}$(0.5 pts) $= 2\begin{vmatrix} \overrightarrow{U_x} & \overrightarrow{U_y} & \overrightarrow{U_z} \\ 0 & 0 & \omega \\ 2t & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4t\omega\overrightarrow{U_y} - 2\omega\overrightarrow{U_x}$(0.25 pts)

L'accélération absolue

$\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_r} + \overrightarrow{a_c} + \overrightarrow{a_e}$ (0.5 pts)

$\Rightarrow \overrightarrow{a_a} = 2\overrightarrow{U_x} + (-\omega^2 t^2)\overrightarrow{U_x} + (-\omega^2 t)\overrightarrow{U_y} + 4t\,\omega\overrightarrow{U_y} - 2\omega\overrightarrow{U_x}$

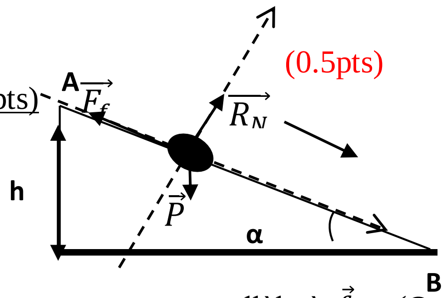
Alors$\overrightarrow{a_a}$=$(2 - 2\omega - \omega^2\, t^2)\overrightarrow{U_x} + (-\omega^2 t + 4t\omega\,)\overrightarrow{U_y}$ (0.25 pts)

<u>Exercice 2: (08pts)</u>

A . 1- **L'angle pour lequel le corps peut descendre** <u>(2,5 pts)</u>

A l'équilibre nous avons

$\Sigma\vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{p} + \overrightarrow{R_N} + \vec{f} = \vec{0}$ (0.25pts)



On choisit le repère, tel que l'axe (Ox) est suivant l'axe du mouvement parallèle à $\vec{f}$ et (Oy) est perpendiculaire à (Ox) donc suivant$\overrightarrow{R_N}$.

Suivant (Ox) : -f + m g sinα=0 (0.25pts)

Suivant (Oy): N-p_y=0⇒ N=m g cosα (0.25pts)

Avec μ_s=tgφ=f/N⇒ $\mu_s = \frac{f}{N}$=0.8 Donc f= 0,8 N=0,8 m g cosα (0.25pts)

Pour que le corps peut descendre, il faut que : m g sinα ≥f (0.5 pts)

m g sinα ≥f ⇒ m g sinα ≥0,8 m g cosα donc tg α≥0,8(0.25 pts) Alors que α ≥ 38,65 (0.25 pts)

2- **La force de frottement dans ce cas** ; f= 0,8 N=0,8 m g cosα=3,12 N (0.5 pts)

3- Pour un angle α= 45 ; **La réaction normale** N= m g cosα=5 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (0.5 pts)

Vitesse au point B (2,5 pts)

$v_B^2 - v_A^2 = 2a(AB) \Rightarrow v_B^2 = 2a(AB)$; v_A=0 (0.25 pts)

En appliquant le PFD : $\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{p} + \vec{N} + \vec{f} = m\vec{a}$ (0.5pts)

Suivant (Ox) – f +p_x= -f + m g sinα=ma….(1)(0.25pts)

Suivant (Oy) N-p_y=0⇒ N=m g cosα……(2) (0.25pts)

μ_d=f/N⇒ f= μ_d N donc f= μ_d m g cosα (0.5pts)

(1): - μ_d m g cosα + m g sinα=ma⇒a=g(sinα- $\mu_d$cosα)=$\sqrt{2}$m/s^2 (0.25pts)

$AB = \frac{h}{\sin\alpha} = \frac{2}{\sqrt{2}}$ (0.25pts) Donc $v_B^2 = 2a(AB) = 4$ et v_B=2m/s (0.25 pts)

1) La distance BC : (les frottements sont négligés et $v_C=0$) 02pts

En appliquant le PFD : $\Sigma\vec{F} = m\vec{a'} \Rightarrow \vec{p} + \vec{R_N} = m\vec{a'}$ (0.25pts)

Suivant (Ox) -p_x= - m g sinβ=ma'….(1) (0.25pts)

Suivant (Oy) R_N -p_y=0⇒ R_N =m g cosβ(0.25pts)

(1): a'=- g sinβ =-10(0.5)=-5

a'=-5m/s^2 (0.25pts)

$et v_c^2 - v_B^2 = 2a'(BC) \Rightarrow -v_B^2 = 2a'(BC)$ (0.25pts)

D'où BC=$\frac{-v_B^2}{2a'} = \frac{-4}{-10} = 0,4m$ (0.25pts)