Université Aboubekr Belkaïd Tlemcen *A.U. 2022/2023*
Faculté des Sciences / Département de Mathématiques
L1 mathématiques

Corrigé Final d'ANALYSE 1
19 janvier 2023
Durée $1h30$
Documents et matériel électroniques interdits

Exercice 1 : [**4 pts**]
En utilisant les définitions des limites **finies** ou **infinies**, montrer que
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{2}\right)^n = +\infty.$$

REP :
a. Notons $U_n = (\frac{2}{3})^n$ et $l = 0$. Il s'agit de démontrer que
$$\boxed{\forall\varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}\ (n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |U_n - l| < \varepsilon).}$$
0.5

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Cherchons donc $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que, si $n \geq N_\varepsilon$, alors $|(\frac{2}{3})^n| < \varepsilon$.
$$\text{Or } \left|\left(\frac{2}{3}\right)^n\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^n < \varepsilon \Leftrightarrow \ln\left(\frac{2}{3}\right)^n < \ln\varepsilon$$
$$\Leftrightarrow n\ln\left(\frac{2}{3}\right) < \ln\varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{\ln\varepsilon}{\ln(2/3)}, \text{ car } \ln(2/3) < 0.$$
0.5

* Si $\varepsilon > 1$, $\ln\varepsilon > 0$ et la dernière inégalité est vérifiée pour tout $n \geq 0$. On peut donc choisir n'importe quel N_ε dans $\mathbb{N}$. **0.25**
*Si $0 < \varepsilon \leq 1$, alors $\frac{\ln\varepsilon}{\ln(2/3)} \geq 0$ et il suffit alors de choisir $N_\varepsilon = [\frac{\ln\varepsilon}{\ln(2/3)}] + 1$. **0.75**
Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{2}{3})^n = 0$.
b. Notons $V_n = (\frac{5}{2})^n$. Il s'agit de démontrer que
$$\boxed{\forall A > 0,\ \exists N_A \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}\ (n \geq N_A \Rightarrow U_n > A).}$$
0.5

Soit $A > 0$ fixé. Cherchons donc $N_A \in \mathbb{N}$ tel que, si $n \geq N_\varepsilon$, alors $(\frac{5}{2})^n > A$.
$$\text{Or } \left(\frac{5}{2}\right)^n > A \Leftrightarrow \ln\left(\frac{5}{2}\right)^n > \ln A \Leftrightarrow n\ln\left(\frac{5}{2}\right) > \ln A$$
$$\Leftrightarrow n > \frac{\ln A}{\ln(5/2)} \text{ car } \ln(5/2) > 0.$$
0.5

* Si $0 < A < 1$, $\ln A < 0$ et la dernière inégalité est vérifiée pour tout $n \geq 0$. On peut donc choisir n'importe quel N_A dans $\mathbb{N}$. *0.25*
*Si $A \geq 1$, alors $\frac{\ln A}{\ln(5/2)} \geq 0$ et il suffit alors de choisir $N_A = [\frac{\ln A}{\ln(5/2)}] + 1$. **0.75**
Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{5}{2})^n = +\infty$.

Exercice 2 : [**6 pts**]

Soit $(U_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par

$$\begin{cases} U_0 = 2, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{U_n}. \end{cases}$$

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n > 1$.

2) La suite $(U_n)_{n\geq 0}$ est-elle monotone ?

3) La suite est-elle convergente? Quelle serait sa limite?

REP :

1) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

* si $n = 0$, $U_0 = 2$ par définition, et on a bien $2 > 1$. **0.25**

*Hypothèse de récurrence (**H**.**R**). On suppose que pour un certain $n \in \mathbb{N}$,

$$U_k > 1 \text{ pour tout } k \leq n.$$

On montre alors que $U_{n+1} > 1$. **0.25**

Première méthode : signe de $U_{n+1} - 1$.

$$U_{n+1} - 1 = 2 - \frac{1}{U_n} - 1 = 1 - \frac{1}{U_n}$$
$$= \frac{U_n - 1}{U_n}.$$

D'après (**HR**), $U_n - 1 > 0$ et forcément $U_n > 0$. Donc

$$U_{n+1} - 1 = \frac{U_n - 1}{U_n} > 0 \Leftrightarrow U_{n+1} > 1.$$

01

Deuxième méthode : D'après (**HR**),

$$U_n > 1 \Rightarrow \frac{1}{U_n} < 1 \Rightarrow -\frac{1}{U_n} > -1$$
$$\Rightarrow 2 - \frac{1}{U_n} > 2 - 1 \Rightarrow U_{n+1} > 1.$$

01

* **Conclusion** : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n > 1$. **0.5**

2) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$U_{n+1} - U_n = (2 - \frac{1}{U_n}) - U_n = -\frac{U_n^2 - 2U_n + 1}{U_n} = -\frac{(U_n - 1)^2}{U_n} < 0$$

car $U_n > 1 > 0$. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} - U_n < 0$ ce qui signifie que la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ est (strictement) **décroissante**. **2**

3) La suite $(U_n)_{n\geq 0}$ étant **décroissante et minorée**, elle converge vers sa borne inférieure qu'on notera par l. **0.5**

Calcul de l : $U_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{U_n} \Rightarrow l = \lim\limits_{n\to+\infty} U_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} (2 - \dfrac{1}{U_n})$

$$= 2 - \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{U_n} = 2 - \frac{1}{l}.$$

Ainsi $l = 2 - \dfrac{1}{l} \Leftrightarrow l^2 = 2l - 1 \Leftrightarrow (l-1)^2 = 0$, d'où $l = 1$.

1.5

Exercice 3 : [**6 pts**]

Montrer que les suites $(U_n)_{n\geq 1}$ et $(V_n)_{n\geq 1}$ définies par

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3},\ n \in \mathbb{N}^*,$$
$$V_n = U_n + \frac{1}{n^2},\ n \in \mathbb{N}^*,$$

sont convergentes et vers la même limite.

REP : Il suffit de montrer que $(U_n)_{n\geq 1}$ et $(V_n)_{n\geq 1}$ sont deux suites adjacentes. **0.5**

* Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} U_{n+1} - U_n &= \left(1 + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{(n+1)^3}\right) - \left(1 + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{n^3}\right) \\ &= \frac{1}{(n+1)^3} > 0 \text{ pour tout } n \geq 1. \end{aligned}$$

<u>La suite $(U_n)_{n\geq 1}$ est donc croissante.</u> **1.5**

* Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} V_{n+1} - V_n &= U_{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} - U_n - \frac{1}{n^2} \\ &= U_{n+1} - U_n + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2} \\ &= \frac{1}{(n+1)^3} + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2} \\ &= \frac{n^2 + n^2(n+1) - (n+1)^3}{n^2(n+1)^3} \\ &= \frac{n^2 + n^3 + n^2 - n^3 - 3n^2 - 3n - 1}{n^2(n+1)^3} \\ &= \frac{-n^2 - 3n - 1}{n^2(n+1)^3} < 0, \text{ pour tout } n \geq 1. \end{aligned}$$

<u>La suite $(V_n)_{n\geq 1}$ est donc décroissante.</u> **02**

* $V_n - U_n = \frac{1}{n^2}$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} (U_n - V_n) = 0.$ **01**

Conclusion : $(U_n)_{n\geq 1}$ et $(V_n)_{n\geq 1}$ sont donc deux suites adjacentes. Un théorème affirme alors qu'elles sont convergentes et vers la même limite. **01**

Exercice 4 : [**4 pts**]

On rappelle qu'une fonction f est dite k-**lipschitzienne** dans son ensemble de définition D_f si :

$$\forall x_1, x_2 \in D_f,\ |f(x_1) - f(x_2)| \leq k.|x_1 - x_2|.$$

Soit la fonction

$$f: \ D_f \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = \frac{1}{|x|+1}.$$

Donner D_f et montrer que f est 1-lipschitzienne dans D_f.

REP : Comme $|x| \geq 0$, on a que $|x|+1 \neq 0$. On voit alors que l'ensemble de définition de f est $\boxed{D_f = \mathbb{R}}$. **0.5**

Soit $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left| \frac{1}{|x_1|+1} - \frac{1}{|x_2|+1} \right| = \left| \frac{|x_2| - |x_1|}{(|x_1|+1)(|x_2|+1)} \right|$$

0.5

$$= \frac{||x_2| - |x_1||}{(|x_1|+1)(|x_2|+1)} \leq \frac{1}{(|x_1|+1)(|x_2|+1)} |x_2 - x_1|, \text{ car } ||x_2| - |x_1|| \leq |x_2 - x_1|.$$

01

D'autre part,

$$(|x_1|+1)(|x_2|+1) > 1 \Rightarrow \frac{1}{(|x_1|+1)(|x_2|+1)} < 1.$$

01

En définitive, sachant que $|-x| = |x|$,

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left| \frac{1}{|x_1|+1} - \frac{1}{|x_2|+1} \right| \leq 1.|x_1 - x_2|.$$

01

Conclusion : f est lipschitzienne, et de constante de Lipschitz 1.

« Les chaussures sont un instrument pour marcher, les maths sont un instrument pour penser. On peut marcher sans chaussures, mais on va moins loin. » Jean Marie Souriau