Université Abou Bekr Belkaid - Tlemcen
Faculté des sciences
Département de mathématiques

Année universitaire: 2022 - 2023
Module: Algèbre 1
L1 Math

Epreuve Finale

NB : L'exercice 1 est obligatoire. Deux exercices parmi les exercices 2, 3 et 4 sont laissés au choix de l'étudiant.

Exercice 1 (8 pts)

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une application définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{1+\sqrt{4+x^2}}.$$

(1) Déterminer $f\left(\{x \in \mathbb{R} \backslash\ x^2 = 4\}\right)$, $f(\mathbb{R}^+)$ et $f^{-1}\left(\{y \in \mathbb{R}^+ \backslash\ |y| = 1\}\right)$.

(2) f est-elle injective? surjective? bijective?

(3) Soit $g = f_{\backslash \mathbb{R}^+} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow J$ où $J = f(\mathbb{R}^+)$, la restriction de f sur $\mathbb{R}^+$.

- Montrer que g est bijective et déterminer g^{-1}.

Exercice 2 (6 pts)

(1) Donner la définition mathématique d'une implication.

(2) Montrer par deux méthodes, qu'une implication est équivalente à sa contraposée.

(3) Soient a et b deux réels. Montrer que :

$$\text{si } \left(a \neq 2 \text{ et } b \neq -1\right) \text{ alors } (a - 2b + ab - 2 \neq 0).$$

Exercice 3 (6 pts)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère les sommes

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \ldots + n \text{ et}$$

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$$

(1) Rappeler la somme S_n .

(2) Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$T_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

(3) En déduire que

$$T_n = S_n^2$$

Exercice 4 (6 pts)

Soit R une relation binaire définie sur $\mathbb{Z}$ par

$$\forall a,\ b \in \mathbb{Z} \ :\ aRb \Leftrightarrow a + b \text{ est pair.}$$

(1) Montrer que R est une relation d'équivalence.

(2) Déterminer $cl(0)$ et $cl(1)$, les classes d'équivalence de 0 et 1 ainsi que l'ensemble quotient.

Bon courage

Algèbre 1
L1 Math.

Corrigé de l'épreuve finale

N.B: L'exercice 1 est obligatoire. Deux exercices parmi les exercices 2, 3 et 4 sont laissés au choix de l'étudiant.

Exercice 1 8 pts

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{1+\sqrt{4+x^2}}$.

1) $A = \{x \in \mathbb{R} / x^2 = 4\} = \{2, -2\} \subset \mathbb{R}$, $B = \{y \in \mathbb{R}^+ / |y| = 1\} = \{1\}$

$f(A) = \{f(x) / x \in A\} = \{f(2), f(-2)\}$

or $f(2) = f(-2) = \dfrac{1}{1+2\sqrt{2}}$, alors $f(A) = \left\{\dfrac{1}{1+2\sqrt{2}}\right\}$ → 1

$f(\mathbb{R}^+) = \{f(x) / x \in \mathbb{R}^+\}$

$x \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow x \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 0 \Rightarrow 4+x^2 \geq 4$

$\Rightarrow \sqrt{4+x^2} \geq 2$

$\Rightarrow 1+\sqrt{4+x^2} \geq 3$

$\Rightarrow 0 < \dfrac{1}{1+\sqrt{4+x^2}} \leq \dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow 0 < f(x) \leq \dfrac{1}{3}$

d'où $f(\mathbb{R}^+) = \left]0, \dfrac{1}{3}\right]$ → 1

$f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \in B\}$.

$f(x) \in B \Rightarrow f(x) = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{1+\sqrt{4+x^2}} = 1$

$\Rightarrow 1+\sqrt{4+x^2} = 1$

$\Rightarrow \sqrt{4+x^2} = 0$

$\Rightarrow x^2 = -4$ impossible

L'équation $f(x)=1$ n'admet pas de solutions.

$f^{-1}(B) = \emptyset$. $\longrightarrow$ 1

② . f n'est pas injective car $f(2)=f(-2)=\dfrac{1}{1+2\sqrt{2}}$. $\longrightarrow$ 0,5

. f n'est pas surjective car, $\exists y=1\in\mathbb{R}^+ / \forall x\in\mathbb{R} : f(x)\neq 1$ $\longrightarrow$ 0,5

. f n'est ni injective ni surjective, donc f n'est pas bijective. $\longrightarrow$ 0,5

③ $g = f|_{\mathbb{R}^+} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow J = f(\mathbb{R}^+) =]0, \frac{1}{3}]$, la restriction de f a $\mathbb{R}^+$

Montrons que g est bijective.

. Injectivité : soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$, $g(x_1) = g(x_2)$

$$g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow \frac{1}{1+\sqrt{4+x_1^2}} = \frac{1}{1+\sqrt{4+x_2^2}}$$

$$\Rightarrow 1+\sqrt{4+x_1^2} = 1+\sqrt{4+x_2^2}$$

$$\Rightarrow 4+x_1^2 = 4+x_2^2$$

$$\Rightarrow x_1^2 = x_1^2 \quad \longrightarrow 1$$

$$\Rightarrow |x_1| = |x_2|$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 \quad \text{car } x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$$

$\Rightarrow$ g est injective.

. Surjectivité : [Soit $y \in]0,\frac{1}{3}]$ cherchons x]

soit $y \in]0, 1/3]$, cherchons $x \in \mathbb{R}^+$, $y = g(x)$

$$y = g(x) = \frac{1}{1+\sqrt{4+x^2}} \Rightarrow 1+\sqrt{4+x^2} = \frac{1}{y} \quad \text{car } y \neq 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{4+x^2} = \frac{1}{y} - 1 = \frac{1-y}{y} > 0 \text{ car } y \leq 1/3 < 1$$

$$\Rightarrow 4+x^2 = \frac{(1-y)^2}{y^2}$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{(1-y)^2}{y^2} - 4 = \frac{(1-y)^2 - 4y^2}{y^2}$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{(1-y-2y)(1-y+2y)}{y^2}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{\frac{(1-3y)(1+y)}{y}} \in \mathbb{R}^+$$

donc $\forall y \in]0,1]$, $\exists x = \sqrt{\frac{(1-3y)(1+y)}{y}} \in \mathbb{R}^+$, $y = g(x)$ $\to 1{,}5$

donc g est surjective.

Remarque : comme $g(\mathbb{R}^+) = f(\mathbb{R}^+) =]0, \frac{1}{3}] = J$ alors g est surjective.

Conclusion : comme g est injective et surjective, alors g est bijective. Donc elle admet une application réciproque g^{-1} définie par : $\to 0{,}5$

$$g^{-1} :]0, \tfrac{1}{3}] \longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$y \longmapsto g^{-1}(y) = \sqrt{\frac{(1-3y)(1+y)}{y}} \to 0{,}5$$

Exercice ② : $\boxed{6\text{pts}}$

① La définition mathématique d'une implication $P \Rightarrow Q$ où P et Q sont deux propositions est : $[P \Rightarrow Q] \Leftrightarrow [\overline{P} \vee Q]$ $\to 1$

② $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ est la contraposée de $P \Rightarrow Q$.

Montrons que $[\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}] \Leftrightarrow [P \Rightarrow Q]$

i) 1ère méthode, en utilisant la table de vérité.

P	Q	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$P \Rightarrow Q$	$\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$
1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1

$\to 1$

On remarque que $P \Rightarrow Q$ et $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ ont même table de vérité.

Donc $[\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}] \Leftrightarrow [P \Rightarrow Q]$

ii) 2ème Méthode : en utilisant la définition d'une implication $\to 1$

$$[\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}] \Leftrightarrow (\overline{\overline{Q}}) \vee \overline{P} \Leftrightarrow (Q \vee \overline{P}) \Leftrightarrow (\overline{P} \vee Q) \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q)$$

③ $a, b \in \mathbb{R}$. Montrons que : $(a \neq 2$ et $b \neq -1) \Rightarrow (a - 2b + ab - 2 \neq 0)$

d'après ②, il suffit de montrer la contraposée :

$$(a - 2b + ab - 2 = 0) \Rightarrow (a = 2 \text{ ou } b = -1)$$

$a - 2b + ab - 2 = 0 \Rightarrow (a + ab) - 2b - 2 = 0 \Rightarrow a(1+b) - 2(b+1) = 0$ $\to 1$

$\Rightarrow (a-2)(b+1) = 0$ $\to 1$

$\Rightarrow a - 2 = 0$ ou $b + 1 = 0$

$\Rightarrow a = 2$ et $b = -1$ $\longrightarrow$ 1

Conclusion :

$\cancel{a - 2b + ab}$ $(a \neq 2$ et $b \neq -1) \Rightarrow (a - 2b + ab - 2 \neq 0)$

Exercice 3 : $\boxed{6pts}$

$n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\dots+n$, $T_n = \sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$

① $S_n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. $\longrightarrow$ 1

② Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $T_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

1ère étape : initialisation :

pour $n = 1$: $T_1 = \sum_{k=1}^{1} k^3 = 1^3 = 1 = \frac{1^2(1+1)^2}{4}$. $\longrightarrow$ 0,5

2ème étape : Hérédité :

Supposons que $T_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ et montrons que $T_{n+1} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$ $\longrightarrow$ 0,5

On a $T_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \underbrace{1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3}_{T_n} + (n+1)^3$ 0,5

$$T_{n+1} = T_n + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \quad \text{(hypothèse de récurrence)}$$

$$T_{n+1} = \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} = \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} \longrightarrow 0{,}5$$

$$T_{n+1} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} \longrightarrow 0{,}5$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $T_n = \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ 0,5

③ $T_n = \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = S_n^2$

donc $T_n = S_n^2$ i.e. $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$ $\longrightarrow$ 1,5

Exercice 4 : $\boxed{6pts}$

Dans $\mathbb{Z}$, on définit la relation R par :

$\forall a, b \in \mathbb{Z}$, $aRb \Leftrightarrow a+b$ est pair.

① Montrons que R est une relation d'équivalence.

(i) Réflexivité : $\forall a \in \mathbb{Z}$, aRa

Soit $a \in \mathbb{Z}$. On a : $a + a = 2a$ qui est pair $\longrightarrow$ 1

donc $\forall a \in \mathbb{Z}$, aRa et par suite R est réflexive.

(ii) Symétrie : $\forall a,b \in \mathbb{Z},\ aRb \Rightarrow bRa$.
Soient $a,b \in \mathbb{Z}$.
$aRb \Rightarrow a+b$ est pair $\Rightarrow b+a$ est pair $\Rightarrow bRa$. → (1)
$\Rightarrow R$ est symétrique.

(iii) Transitivité : $\forall a,b,c \in \mathbb{Z},\ aRb$ et $bRc \Rightarrow aRc$.
Soient $a,b,c \in \mathbb{Z}$.
aRb et $bRc \Rightarrow \begin{cases} a+b \text{ pair} \\ b+c \text{ pair} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \exists k_1 \in \mathbb{Z} : a+b = 2k_1 & \boxed{1} \\ \exists k_2 \in \mathbb{Z} : b+c = 2k_2 & \boxed{2} \end{cases}$

$\boxed{1} + \boxed{2} \Rightarrow a+2b+c = 2(k_1+k_2) \Rightarrow a+c = 2(k_1+k_2-b)$
donc $\exists k = k_1+k_2-b \in \mathbb{Z} : a+c = 2k \Rightarrow a+c$ pair
$\Rightarrow aRc$ → (1)
$\Rightarrow R$ est transitive.

Conclusion :
Comme R est réflexive, symétrique et transitive, alors elle est une relation d'équivalence. → (0,5)

(3) Classes d'équivalence de 0 et 1 et ensemble quotient.
$cl(0) = \dot{0} = \{a \in \mathbb{Z},\ aR0\}$
$aR0 \Leftrightarrow a+0$ est pair $\Leftrightarrow a$ est pair $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : a = 2k$.
donc $cl(0) = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\}$ → (1)
$cl(1) = \dot{1} = \{a \in \mathbb{Z} \mid aR1\}$
$aR1 \Leftrightarrow a+1$ est pair $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : a+1 = 2k \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : a = 2k-1$
$\Leftrightarrow a$ est impair
$cl(1) = \{2k-1 \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{2k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -3, -1, 1, 3, 5, \dots\}$ → (1)
On remarque que pour tout $a \in \mathbb{Z}$, soit $a \in cl(0)$, soit $a \in cl(1)$
d'où l'ensemble quotient :
$$\mathbb{Z}/R = \{cl(0), cl(1)\}.$$ → (0,5)