Université Aboubekr Belkaïd Tlemcen *A.U. 2022/2023*
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
L1 mathématiques

Partiel d'ANALYSE 1
8 décembre 2022
Durée $1h30$
L'usage de documents et de calculatrices est interdit

Exercice 1 : [**7.5 pts**]

$1)$ Résoudre dans R l'équation $[|x+3|] = 2$, où $[.]$ désigne la partie entière d'un réel.

$2.a)$ Montrer par l'absurde que la somme d'un nombre rationnel et d'un nombre irrationnel est un nombre irrationnel.

$2.b)$ La somme de deux nombres irrationnels est-elle irrationnelle? Justifier.

$3)$ On rappelle que $\sqrt{2}$ et $\sqrt{5}$ sont irrationnels. Montrer alors par l'absurde que $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ est irrationnel.

Exercice 2 : [**5.5 pts**]

Soit $A = [\pi, 6] \cup \{7\} \subset \mathbb{R}$. Déterminer dans R, s'ils existent, les <u>majorants</u>, la <u>borne supérieure</u> et le <u>plus grand élément</u> de A. Justifier.

Exercice 3 : [**7 pts**]

$1)$ Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de terme général $U_n = \frac{n-2}{2n}$. Montrer que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée. $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle monotone?

$2.a)$ Donner la définition mathématique d'une suite qui n'est pas croissante.

$2.b)$ Montrer que la suite de terme général $V_n = n(-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$, n'est pas croissante. Une suite non croissante est-elle décroissante?

$3)$ Soit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq V_n \leq 1$. Montrer alors que la suite de terme général $U_n = \frac{nV_n}{n^2+1}$, $n \in \mathbb{N}$, est convergente. Quelle est sa limite?

Université Aboubekr Belkaïd Tlemcen *A.U. 2022/2023*
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
L1 mathématiques

Corrigé du partiel d'ANALYSE 1
8 décembre 2022

Exercice 1 : [**7.5 pts**]

$1)$ Résoudre dans R l'équation $[|x+3|] = 2$, où $[.]$ désigne la partie entière d'un réel.

$2.a)$ Montrer par l'absurde que la somme d'un nombre rationnel et d'un nombre irrationnel est un nombre irrationnel.

$2.b)$ La somme de deux nombres irrationnels est-elle irrationnelle? Justifier.

$3)$ On rappelle que $\sqrt{2}$ et $\sqrt{5}$ sont irrationnels. Montrer alors par l'absurde que $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ est irrationnel.

REP :

$1)$ Par définition de la partie entière d'un réel, on a

$$[|x+3|] = 2 \Leftrightarrow 2 \leq |x+3| < 3. \quad (I)$$

0.5

Si $x+3 \geq 0,$ i.e. si $x \geq -3$, alors $(I) \Leftrightarrow 2 \leq x+3 < 3 \Leftrightarrow -1 \leq x < 0$.

Ainsi $x \geq -3$ et $-1 \leq x < 0$. D'où $x \in [-1, 0[$. *01*

Si $x+3 < 0,$ i.e. si $x < -3$, alors

$$(I) \Leftrightarrow 2 \leq -x-3 < 3 \Leftrightarrow 5 \leq -x < 6$$
$$\Leftrightarrow -6 < x \leq -5.$$

Ainsi $x < -3$ et $-6 < x \leq -5$. D'où $x \in]-6, -5]$. *01*

Conclusion : $[|x+3|] = 2 \Leftrightarrow x \in]-6, -5] \cup [-1, 0[$. *0.5*

$2.a)$ Il s'agit de démontrer que

$$\forall x \in \mathrm{Q},\ \forall y \in \mathrm{I},\ x+y \in \mathrm{I}.$$

Supposons par l'absurde qu'il existe $x \in$ Q et $y \in$ I tels que $x+y =: r \in$ Q. *0.5*

D'où $y = r-x$. Comme Q est un corps, ($r \in$ Q et $x \in$ Q) $\Rightarrow r-x \in$ Q. *0.5*

Donc $y \in$ Q. Absurde, car $y \in$ I (et Q $\cap$ I $= \emptyset$). *0.5*

Conclusion : la somme d'un nombre rationnel et d'un nombre irrationnel est un nombre irrationnel.

$2.b)$ La question signifie : la proposition

$$\forall x \in \mathrm{I},\ \forall y \in \mathrm{I},\ x+y \in \mathrm{I},$$

est-elle vraie?

Elle n'est pas vraie car il existe au moins deux irrationnels x et y dont la somme n'est pas rationnelle. Par exemple $x = \sqrt{2}$ et $y = -\sqrt{2}$ sont irrationnels mais $x+y = 0 \notin$ I. *01*

3) Supposons par l'absurde qu'il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $\sqrt{2} + \sqrt{5} = r$ *0.5*

De là,

$\sqrt{2} = r - \sqrt{5} \Rightarrow (\sqrt{2})^2 = (r - \sqrt{5})^2 \Leftrightarrow 2 = r^2 - 2r\sqrt{5} + 5$

$\Leftrightarrow \sqrt{5} = \dfrac{r^2+3}{2r} \in \mathbb{Q}$ car $\mathbb{Q}$ est un corps (Noter que $r \neq 0$) *01*

Donc $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}$. Absurde, donc $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ est irrationnel. *0.5*

Remarque : Nous venons en fait de montrer dans (3) que

$$\exists x \in \mathbb{I},\ \exists y \in \mathbb{I}\ : x + y \in \mathbb{I}.$$

Ce résultat n'est donc pas en contradiction avec la question $(2.b)$ où nous avions montré que

$$\exists x \in \mathbb{I},\ \exists y \in \mathbb{I}\ : x + y \notin \mathbb{I}.$$

Exercice 2 : [**5.5 pts**]

Soit $A = [\pi, 6] \cup \{7\} \subset \mathbb{R}$. Déterminer dans $\mathbb{R}$, s'ils existent, les <u>majorants</u>, la <u>borne supérieure</u> et le <u>plus grand élément</u> de A. Justifier.

REP:

$\ast$ Si on ne répond pas aux questions dans l'ordre , on peut procéder comme suit :

1/ L'ensemble des majorants de A dans $\mathbb{R}$ est : $[7, +\infty[$. *1.5*

2/ Le réel 7 est un majorant de A et $7 \in A$, donc 7 est le plus grand élément de A, i.e. $MaxA = 7$. *2.5*

3/ On en déduit que $SupA = MaxA = 7$. *1.5*

$\ast$ Si on répond aux questions dans l'ordre, on procède comme suit :

1/ L'ensemble des majorants de A dans $\mathbb{R}$ est : $[7, +\infty[$. *1.5*

2/ Montrons que 7 est le plus petit des majorants de A. Pour $\varepsilon > 0$ fixé, on cherche $x_0 \in A$ tel que $7 - \varepsilon < x_0 \leq 7$ *0.5*

Il est clair que $x_0 = 7$ convient. *01*

Ainsi,

$$\begin{cases} 7 \text{ est un majorant de } A \text{ dans } \mathbb{R}, \\ 7 \text{ est le plus petit majorant de } A. \end{cases}$$

Donc la borne supérieure de A dans $\mathbb{R}$ existe et $SupA = 7$. *01*

3/ Comme $7 \in A$, alors $MaxA = 7$. *1.5*

Exercice 3 : [**7 pts**]

1) Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de terme général $U_n = \dfrac{n-2}{2n}$. Montrer que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée. $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est-elle monotone?

$2.a)$ Donner la définition mathématique d'une suite qui n'est pas croissante.

$2.b)$ Montrer que la suite de terme général $V_n = n(-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$, n'est pas croissante. Une suite non croissante est-elle décroissante?

3) Soit $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq V_n \leq 1$. Montrer alors que la

suite de terme général $U_n = \frac{nV_n}{n^2+1}$, $n \in \mathbb{N}$, est convergente. Quelle est sa limite?

REP :

1) $*$ Notons d'abord que l'on peut répondre à la première partie de la question en montrant par un simple calcul que $(U_n)_n$ est convergente. Or on a démontré que toute suite convergente est bornée. *1.5*

$*$Sinon, sans parler de convergence, on montre que la suite est bornée en utilisant la définition.

Pour tout $n \geq 1$, on peut écrire $U_n = \frac{n-2}{2n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$. *0.5*

On a alors, pour tout $n \geq 1$:

$0 < \frac{1}{n} \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -\frac{1}{n} < 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{n} < \frac{1}{2}$

$\Rightarrow -\frac{1}{2} \leq U_n < \frac{1}{2}$. *0.5*

La suite $(U_n)_{n\geq 1}$ est donc bornée. (On peut écire aussi que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|U_n| \leq \frac{1}{2}$). *0.5*

$*$ Vérifions si $(U_n)_{n\geq 1}$ est monotone (c-à-d croissante ou décroissante).

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_{n+1} - U_n = (\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}) - (\frac{1}{2} - \frac{1}{n}) = \frac{1}{n(n+1)} > 0$.

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $U_n < U_{n+1.}$ La suite $(U_n)_{n\geq 1}$ est (strictement) croissante. *01*

2.a) Une suite $(U_n)_{n\geq 0}$ est croissante si :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ U_n \leq U_{n+1}.$$

0.5

Par négation, une suite n'est pas croissante si

$$\exists n \in \mathbb{N},\ U_n > U_{n+1}. \qquad (A).$$

01

2.b) Soit $V_n = n(-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

$*$ Pour montrer que la suite $(V_n)_n$ n'est pas croissante, il suffit d'en calculer quelques termes consécutifs :

$V_0 = 0$, $V_1 = 1(-1)^1 = -1$, $V_2 = 2(-1)^2 = 2$.

On voit alors que $V_0 > V_1$. D'après (A), la suite n'est pa croissante. *0.75*

$*$ Pour cette même suite, on a $V_1 < V_2$. La suite $(V_n)_n$ n'est donc pas décroissante.

Ainsi, une suite qui n'est pas croissante, n'est pas nécessairement décroissante. On voit bien d'ailleurs que la négation (A) de la croissance n'est pas la décroissance. *0.75*

3) On propose deux solutions :

$*$ On utilise la règle de l'encadrement : si une suite est comprise entre deux suites convergeant vers la même limite, alors elle converge aussi vers cette limite.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{n}{n^2+1}(-1) \leq \frac{nV_n}{n^2+1} \leq \frac{n}{n^2+1}(+1)$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\pm n}{n^2+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\pm 1}{n+1/n} = 0$.

Donc $(U_n)_n := \left(\frac{n}{n^2+1}V_n\right)_n$ est convergente et $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$. *1.5*

$\ast$ On utilise le fait que le produit d'une suite bornée par une suite convergeant vers 0 est une suite convergeant aussi vers 0.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = \frac{nV_n}{n^2+1} = \frac{n}{n^2+1}V_n$.

On a que $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n^2+1} = 0$ et $(V_n)_n$ est bornée.

Donc $(U_n)_n := \left(\frac{n}{n^2+1}V_n\right)_n$ est convergente et $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$. *1.5*