Université Abou Bekr Belkaid - Tlemcen
Faculté des sciences
Département de mathématiques

Année universitaire: 2022 - 2023
Module: Algèbre 1
L1 Math

Contrôle continu (Remplacement)

Exercice 1 (4 pts)

Soient P et Q deux propositions.
Montrer par deux méthodes que l'implication suivante est toujours vraie:

$$(P \wedge Q) \Rightarrow (\overline{P} \vee Q)$$

Exercice 2 (5 pts)

Considérons les propositions suivantes:

$$P : \forall x \in \mathbb{R}^{+}, \sqrt{x^2+1} + x > 0,$$
$$Q : \forall x \in \mathbb{R}^{-*}, \sqrt{x^2+1} + x > 0 \text{ et}$$
$$R : \forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2+1} + x > 0$$

(1) Montrer par un raisonnement direct que P est vraie.
(2) Ecrire la négation de la proposition Q.
(3) Montrer par l'absurde que Q est vraie.
(4) En déduire que R est vraie.

Exercice 3 (6 pts)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(1) Rappeler la somme $\sum_{k=1}^{n} k$.
(2) Vérifier que : $2n^2 + 7n + 6 = (n+2)(2n+3)$.
(3) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

(4) En déduire la somme $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$.

Exercice 4 (5 pts)

Considérons les deux ensembles suivants :

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} \setminus \exists\, t \in [0,\ 1] : x = t + 2\right\} \text{ et}$$
$$B = \left\{x \in \mathbb{R} \setminus \left|x - \frac{5}{2}\right| \leq \frac{1}{2}\right\}.$$

(1) Ecrire l'ensemble B sous la forme d'un intervalle $[a,\ b]$.
(2) Montrer que $A = B$.

Bon courage

Corrigé. C.C (Remp.)

L1 Math
Algèbre 1

Exercice 1

P et Q deux propositions.

Montrons que l'implication $(P \wedge Q) \Rightarrow (\bar{P} \vee Q)$ est toujours vraie

(i) table de vérité

2,5

P	Q	$\bar{P}$	$P\wedge Q$	$\bar{P}\vee Q$	$P\wedge Q \Rightarrow \bar{P}\vee Q$
1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	1
0	1	1	0	1	1
0	0	1	0	1	1

On remarque que $P\wedge Q \Rightarrow \bar{P}\vee Q$ est toujours vraie

(ii) (déf. $\Rightarrow$)

$$[(P\wedge Q) \Rightarrow (\bar{P}\vee Q)] \Leftrightarrow \overline{P\wedge Q} \vee (\bar{P}\vee Q)$$

$$\Leftrightarrow (\bar{P}\vee \bar{Q}) \vee (\bar{P}\vee Q) \text{ (Morgan)}$$

$$\Leftrightarrow (\bar{P}\vee \bar{P}) \vee (Q\vee \bar{Q})$$

$$\Leftrightarrow \bar{P} \vee (Q\vee \bar{Q})$$

2,5

or $Q\vee\bar{Q}$ est tjs vraie (principe du tiers exclu)

donc $P\wedge Q \Rightarrow \bar{P}\vee Q$ est tjs vraie

Exercice 2

$P: \forall x\in\mathbb{R}^+, \sqrt{1+x^2}+x>0$, $Q: \forall x\in\mathbb{R}^{-*}, \sqrt{1+x^2}+x>0$, $R: \forall x\in\mathbb{R}, \sqrt{1+x^2}+x>0$

1) Montrons par un raisonnement direct que P est vraie.

Soit $x\in\mathbb{R}^+$ $(x\geq 0)$. $x\geq 0 \Rightarrow x^2\geq 0 \Rightarrow x^2+1>0 \Rightarrow \sqrt{x^2+1}>0$ 1,5

$\Rightarrow \sqrt{x^2+1}+x>0$

Conclusion : $\forall x\in\mathbb{R}^+, \sqrt{x^2+1}+x>0$.

2) Négation de Q : $\bar{Q} \Leftrightarrow \exists x\in\mathbb{R}^{-*}, \sqrt{x^2+1}+x\leq 0$. 0,5

3) Montrons par l'absurde que Q est vraie.

Supposons que $\exists x\in\mathbb{R}^{-*}, \sqrt{x^2+1}+x\leq 0$. 2

$\sqrt{x^2+1}+x\leq 0 \Rightarrow \sqrt{x^2+1}\leq -x \Rightarrow (\sqrt{x^2+1})^2 \leq (-x)^2$ car $-x>0$

$\Rightarrow x^2+1\leq x^2 \Rightarrow 1\leq 0$

C'est une contradiction

donc Q est vraie.

4) $R: \forall x\in\mathbb{R}, \sqrt{x^2+1}+x>0$

si $x\in\mathbb{R}^+$ $(x\geq 0)$ on a $\sqrt{x^2+1}+x>0$ (P est vraie)

si $x\in\mathbb{R}^{-*}$ $(x<0)$ on a $\sqrt{x^2+1}+x>0$ (Q est vraie)

$\Rightarrow$ R est vraie 1

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

① $\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$. $\boxed{0{,}5}$

② $(n+2)(2n+3) = 2n^2+3n+4n+6 = 2n^2+7n+6$. $\boxed{0{,}5}$

③ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, par récurrence.

1ère étape : initialisation.

Pour $n=1$: $S_1 = \sum_{k=1}^{1} k^2 = 1^2 = 1 = \frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6}$ $\boxed{0{,}5}$

2ème étape : Hérédité :

$\boxed{0{,}5}$

Supposons que $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et montrons que $S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$.

$S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \underbrace{1^2+2^2+\dots+n^2}_{S_n} + (n+1)^2 = S_n + (n+1)^2$

$S_{n+1} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)\left[n(2n+1)+6(n+1)\right]}{6}$

$= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$ d'après ②

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. $\boxed{2{,}5}$

④ $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \sum_{k=1}^{n} (k^2+k) = \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}$

$= \frac{n(n+1)(2n+1+3)}{6}$

$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ $\boxed{1}$

Exercice 4

$A = \{x \in \mathbb{R} / \exists t \in [0,1] : x = t+2\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} / |x - 5/2| \leq \frac{1}{2}\}$

① $x \in B \iff |x - 5/2| \leq \frac{1}{2} \iff -\frac{1}{2} \leq x - 5/2 \leq \frac{1}{2} \iff \frac{5}{2} - \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{5}{2} + \frac{1}{2}$

$\iff 2 \leq x \leq 3$

donc $B = [2,3]$ $\boxed{2}$

② $A = B \iff A \subset B$ et $B \subset A$ $\boxed{0{,}5}$

• $x \in A \implies \exists t \in [0,1] : x = t+2 \implies \exists t \in [0,1] : t = x-2 \implies 0 \leq x-2 \leq 1$

$\implies 2 \leq x \leq 3 \implies x \in B$

$\implies A \subset B$ $\boxed{1{,}5}$

• $x \in B \implies 2 \leq x \leq 3 \implies 0 \leq x-2 \leq 1$. Posons $t = x-2$ $\boxed{1{,}5}$

$\implies \exists t \in [0,1] : t = x-2 \implies \exists t \in [0,1] : x = t+2 \implies x \in A \implies B \subset A$

Conclusion $A = B$