Université Abou Bekr Belkaid - Tlemcen
Faculté des sciences
Département de mathématiques

Année universitaire: 2022 - 2023
Module: Algèbre 1
L1 Math

Contrôle continu

Exercice 1 (5 pts)

Soient P et Q deux propositions.

(1) Montrer que

$$(\overline{P \Rightarrow Q}) \Leftrightarrow (P \wedge \overline{Q})$$

en utilisant

(i) la table de vérité,

(ii) la définition d'une implication et les lois de De Morgan.

(2) **Application**: Soient a et b deux réels strictement positifs. Montrer par l'absurde que :

$$(a \neq b) \Rightarrow \left(\frac{a}{b} \neq \frac{b}{a}\right).$$

Exercice 2 (4,5 pts)

Soient $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$. Considérons les deux propositions suivantes :

$$P: \ (\forall \varepsilon > 0, |l_1 - l_2| \leq \varepsilon) \Rightarrow (l_1 = l_2) \text{ et } Q: \ (l_1 \neq l_2) \Rightarrow (\exists \varepsilon > 0, |l_1 - l_2| > \varepsilon).$$

(1) Montrer que les propositions P et Q sont équivalentes.

(2) Montrer que la proposition Q est vraie et en déduire que la proposition P est vraie.

(**Indication** : $(l_1 \neq l_2) \Rightarrow |l_1 - l_2| > 0$)

Exercice 3 (6 pts)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la somme

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k(k+1) = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \ldots + n(n+1).$$

(1) Calculer S_1, S_2 et S_3 .

(2) Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

(3) En déduire la somme $\sum_{k=1}^{n} k^2$.

$\left(\textbf{Indication} : \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \text{ et } \sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k\right).$

Exercice 4 (4,5 pts)

(1) Ecrire en extension l'ensemble suivant :

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} \backslash \exists\, n \in \mathbb{N}^* : x = -\frac{1}{n} \text{ et } 1 \leq n < 3\right\}.$$

(2) Ecrire en compréhension l'ensemble suivant:

$$B = \{1, 4, 9, 16\}.$$

(3) Considérons les deux ensembles E et F définis par :

$$E = \left\{x \in \mathbb{R} \backslash \exists\, t \in \mathbb{R} : x = t^2\right\} \text{ et } F = \left\{x \in \mathbb{R} \backslash x \geq 0\right\}.$$

Montrer que $E = F$.

Bon courage

Université Abou Bekr Belkaid - Tlemcen
Faculté des sciences
Département de mathématiques

Année universitaire: 2022 - 2023
Module: Algèbre 1
L1 Math

Corrigé du contrôle continu

Exercice 1 $(\mathbf{5\ pts})$

Soient P et Q deux propositions.

(1) Montrons que $(\overline{P \Rightarrow Q}) \Leftrightarrow (P \wedge \overline{Q})$

(i) En utilisant la table de vérité

P	Q	$\overline{Q}$	$P \Rightarrow Q$	$\overline{P \Rightarrow Q}$	$P \wedge \overline{Q}$
1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	1	1
0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	0

$\rightarrow \mathbf{(2)}$

On remarque que les propositions $\overline{P \Rightarrow Q}$ et $P \wedge \overline{Q}$ ont même table de vérité donc

$$(\overline{P \Rightarrow Q}) \Leftrightarrow (P \wedge \overline{Q})$$

(ii) En utilisant la définition d'une implication et les lois de De Morgan.

On a $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow \left(\overline{P} \vee Q\right)$ et $(\overline{A \vee B}) \Leftrightarrow (\overline{A} \wedge \overline{B})$

donc $(\overline{P \Rightarrow Q}) \Leftrightarrow \overline{\left(\overline{P} \vee Q\right)} \Leftrightarrow \overline{\overline{P}} \wedge \overline{Q} \Leftrightarrow P \wedge \overline{Q} \quad \rightarrow \mathbf{(1,5)}$

(2) **Application**: Soient $a,\ b \in \mathbb{R}^{+*}$.

Montrons par l'absurde que : $(a \neq b) \Rightarrow \left(\frac{a}{b} \neq \frac{b}{a}\right)$

D'après (1) on a $\overline{(a \neq b) \Rightarrow \left(\frac{a}{b} \neq \frac{b}{a}\right)} \Leftrightarrow (a \neq b)$ et $\left(\frac{a}{b} = \frac{b}{a}\right)$

On suppose que $a \neq b$ et $\frac{a}{b} = \frac{b}{a}$ $\quad \rightarrow \mathbf{(0,5)}$

On a $\left(\frac{a}{b} = \frac{b}{a}\right) \Rightarrow (a^2 = b^2) \Rightarrow (a-b)(a+b) = 0 \quad \rightarrow \mathbf{(0,5)}$

$$\Rightarrow a + b = 0 \text{ car } a \neq b$$

c'est une contadiction car $a > 0$ et $b > 0$ $(a+b > 0)$ $\quad \rightarrow \mathbf{(0,5)}$

Conclusion : $(a \neq b) \Rightarrow \left(\frac{a}{b} \neq \frac{b}{a}\right)$

Exercice 2 $(\mathbf{4,5\ pts})$

Soient $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$. Considérons les deux propositions suivantes.

$$P :\ (\forall \varepsilon > 0, |l_1 - l_2| \leq \varepsilon) \Rightarrow (l_1 = l_2) \text{ et } Q :\ (l_1 \neq l_2) \Rightarrow (\exists \varepsilon > 0, |l_1 - l_2| > \varepsilon).$$

(1) Montrons que $P \Leftrightarrow Q$.

La proposition P est une implication de la forme $A \Rightarrow B$, donc elle est équivalente à sa contraposée $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$

$$\begin{aligned} P &\Leftrightarrow [(\forall \varepsilon > 0, |l_1 - l_2| \leq \varepsilon) \Rightarrow (l_1 = l_2)] \\ &\Leftrightarrow \left[\overline{(l_1 = l_2)} \Rightarrow \overline{(\forall \varepsilon > 0, |l_1 - l_2| \leq \varepsilon)}\right] && \rightarrow \mathbf{(0,5)} \\ &\Leftrightarrow [(l_1 \neq l_2) \Rightarrow (\exists \varepsilon > 0, |l_1 - l_2| > \varepsilon)] && \rightarrow \mathbf{(1)} \\ P &\Leftrightarrow Q && \rightarrow \mathbf{(0,5)} \end{aligned}$$

(2) Montrons que la proposition Q est vraie et en déduire que la proposition P est vraie.

On a $l_1 \neq l_2 \Rightarrow |l_1 - l_2| > 0 \Rightarrow |l_1 - l_2| > \frac{|l_1 - l_2|}{2}$ $\quad \rightarrow \mathbf{(1)}$

donc $(l_1 \neq l_2) \Rightarrow \left(\exists \varepsilon = \frac{|l_1 - l_2|}{2} > 0, |l_1 - l_2| > \frac{|l_1 - l_2|}{2} = \varepsilon\right)$ $\quad \rightarrow \mathbf{(1)}$

ce qui prouve que la proposition Q est vraie;

Comme $P \iff Q$ alors on déduit que la proposition P est vraie. $\rightarrow (\mathbf{0,5})$

Exercice 3 $(\mathbf{6\ pts})$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la somme $S_n = \sum_{k=1}^{n} k(k+1) = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \ldots + n(n+1)$.

(1) Calculons S_1, S_2 et S_3 .

$$S_1 = \sum_{k=1}^{1} k(k+1) = 1.2 = 2 \qquad \rightarrow (\mathbf{0,5})$$

$$S_2 = \sum_{k=1}^{2} k(k+1) = 1.2 + 2.3 = 2 + 6 = 8 \qquad \rightarrow (\mathbf{0,5})$$

$$S_3 = \sum_{k=1}^{3} k(k+1) = 1.2 + 2.3 + 3.4 = 2 + 6 + 12 = 20 \qquad \rightarrow (\mathbf{0,5})$$

(2) Démontrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^* : S_n = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

$1^{ère}$ **étape**: **initialisation**

pour $n = 1$

$$S_1 = \sum_{k=1}^{1} k(k+1) = 1.2 = 2 = \frac{1.(1+1)(1+2)}{3} \qquad \rightarrow (\mathbf{0,5})$$

$2^{ème}$ **étape**: **hérédité**

Supposons que $S_n = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$ et montrons que $S_{n+1} = \dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$ $\rightarrow (\mathbf{0,5})$

On a $S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) = \underbrace{1.2 + 2.3 + 3.4 + \ldots + n(n+1)}_{S_n} + (n+1)(n+2)$

donc

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + (n+1)(n+2) \qquad \rightarrow (\mathbf{0,5}) \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2) \text{ (Hypothèse de récurrence)} \\ &= \frac{n(n+1)(n+2) + 3(n+1)(n+2)}{3} \qquad \rightarrow (\mathbf{0,5}) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)[n+3]}{3} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}. \end{aligned}$$

donc

$$S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3} \qquad \rightarrow (\mathbf{0,5})$$

Conclusion :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : S_n = \sum_{k=1}^{n} k(k+1) = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \ldots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}. \qquad \rightarrow (\mathbf{0,5})$$

(3) En déduire la somme $\sum_{k=1}^{n} k^2$.

On a

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \text{ et}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \sum_{k=1}^{n} (k^2 + k) = \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k \qquad \rightarrow (\mathbf{0,5})$$

d'où

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k$$

et par suite

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k^2 &= S_n - \sum_{k=1}^{n} k \qquad \rightarrow (\mathbf{0,5})\\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} - \frac{n(n+1)}{2}\\ &= \frac{2n(n+1)(n+2) - 3n(n+1)}{6}\\ &= \frac{2n(n+1)(n+2) - 3n(n+1)}{6}\\ &= \frac{n(n+1)[2(n+2) - 3]}{6}\\ \sum_{k=1}^{n} k^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \qquad \rightarrow (\mathbf{0,5})\end{aligned}$$

Exercice 4 $(\mathbf{4,5\ pts})$

(1) Ecrivons en extension l'ensemble suivant : $A = \left\{x \in \mathbb{R} \backslash \exists\ n \in \mathbb{N}^* : x = -\frac{1}{n} \text{ et } 1 \leq n < 3\right\}$.

$n \in \mathbb{N}^*$ et $1 \leq n < 3 \Rightarrow n \in \{1,2\}$, donc $x \in \left\{-\frac{1}{1}, -\frac{1}{2}\right\}$

d'où $A = \left\{x \in \mathbb{R} \backslash \exists\ n \in \mathbb{N}^* : x = -\frac{1}{n} \text{ et } 1 \leq n < 3\right\} = \left\{-\frac{1}{2}, -1\right\} \qquad \rightarrow (\mathbf{1})$

(2) Ecrivons en compréhension l'ensemble suivant : $B = \{1,4,9,16\}$.

On remarque que $1,4,9$ et 16 sont des carrés. Donc

$$B = \{1,4,9,16\} = \left\{n^2 / \ n \in \mathbb{N} \text{ et } 1 \leq n \leq 4\right\} = \left\{n^2 / \ n \in \mathbb{Z} \text{ et } -4 \leq n \leq 4\right\} \qquad \rightarrow (\mathbf{1})$$

(3) Considérons les deux ensembles E et F définis par:

$$E = \left\{x \in \mathbb{R} \backslash \exists\ t \in \mathbb{R} : x = t^2\right\} \text{ et } F = \left\{x \in \mathbb{R} \backslash x \geq 0\right\}$$

Montrons que $E = F$.

Notons que $F = \mathbb{R}^+$.

$$E = F \Leftrightarrow E \subset F \text{ et } F \subset E \qquad \rightarrow (\mathbf{0,5})$$

(i) $E \subset F$

Soit $x \in E$. Donc $\exists\ t \in \mathbb{R} : x = t^2 \geq 0$, ce qui prouve que $x \in F = \mathbb{R}^+ \qquad \rightarrow (\mathbf{0,5})$

donc $E \subset F \qquad \rightarrow (\mathbf{0,5})$

(ii) $F \subset E$

Soit $x \in F = \mathbb{R}^+$, c'est à dire $x \geq 0$.

Donc $\exists\ t \in \mathbb{R} : 0 \leq x = t^2$. Ce qui prouve que $x \in E$. $\qquad \rightarrow (\mathbf{0,5})$

Et par suite $F \subset E \qquad \rightarrow (\mathbf{0,5})$

Conclusion : $E = F = \mathbb{R}^+$