Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen. $1^{ère}$ année LMD (2022/2023).
Faculté des Sciences. **S2-MI**, durée 1h:30′.

Rattrapage -Analyse 2-

Question de cours (05 points)

Résoudre l'EDO du $\mathbf{2}^{ème}$ **ordre** suivante :

$$xy'' + y' + x = 0; \quad (x > 0).$$

Exercice 1 (06.5 points)

1. **(04.5 points).** En utilisant la **formule de Taylor(Mc–Laurin)-Young**, déterminer le $DL_2(0)$ des fonctions suivantes :
$$x \mapsto f(x) = e^x \qquad \text{et} \quad x \mapsto g(x) = \ln(1+x).$$
2. **(1 point). En déduire** le $DL_2(0)$ de la fonction $x \mapsto h(x) = e^x \ln(1+x)$.
3. **(1 point).** En déduire alors **la limite**:
$$L = \lim_{x \to 0} \frac{e^x \ln(1+x) - x}{x^2}.$$

Exercice 2 (08.5 points) Les questions suivantes sont complètement indépendantes.

1. **(2.5 points).** En utilisant la **règle de l'Hôpital**, **montrer** que la fonction suivante est **dérivable** en 0 et **préciser** le **nombre dérivé** de f en 0:
$$x \mapsto f(x) = \tan\left(\frac{\pi}{2x+1}\right).$$
2. **(02.5 points). Par parties**, calculer l'intégrale suivante :
$$I = \int x\sqrt{x+1}dx.$$
3. **(02 points).** Par un **changement de variables**, calculer l'intégrale suivante :
$$J = \int \frac{x}{x^4+4}dx.$$
4. **(01.5 point).** Résoudre l'EDO d'ordre 1, **à variables séparables** suivante :
$$x^2\, y + \sqrt{1+x^3}\, y' = 0.$$

Remarque: L'usage des téléphones portables est strictement interdit. Bon courage.

Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen. $1^{ère}$ année LMD (2022/2023).
Faculté des Sciences S2-MI, durée 1h:30$'$

Correction du Rattrapage -Analyse 2-

Question de cours (5 points)
Résoudre l'EDO du $\mathbf{2}^{ème}$ **ordre** suivante :

$$xy'' + y' + x = 0; (x > 0)...(1)$$

On pose $z = y'$, on trouve $z' = y''$ (**1point**). Ce qui fait que l'équation (1) devient :

$$(1) \Leftrightarrow xz' + z + x = 0...(2)$$

Qui est une EDO linéaire du 1^{er} ordre.

$$(2) \Leftrightarrow z' + \frac{1}{x}z = -1$$

Avec $a(x) = \dfrac{1}{x}$ et $b(x) = -1$. (**0.5point**)
$\int a(x)dx = \ln x$ donc le facteur intégrant est $R(x) = e^{-\int a(x)dx} = e^{-\ln x} = \dfrac{1}{x}$.(**1point**)
Ensuite, $K(x) = \int \frac{b(x)}{R(x)}dx = \int -xdx = \dfrac{-x^2}{2}$. (**1point**)

La solution est donc donnée sous la forme:

$$\begin{aligned} z(x) &= R(x)\left(K(x) + C_1\right). \\ &= \frac{1}{x}\left(\frac{-x^2}{2} + C_1\right) \\ &= \frac{-x}{2} + \frac{C_1}{x}(\mathbf{0.5point}) \end{aligned}$$

Et comme $y(x) = \int z(x)dx$ alors $y(x) = \int \left(\frac{-x}{2} + \frac{C_1}{x}\right) dx$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{-x^2}{4} + C_1 \ln x + C_2. \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R}).(\mathbf{1point})$$

Exercice 1 (06.5 points)

1. En utilisant la **formule de Taylor-Young**, déterminer le $DL_2(0)$ des fonctions suivantes :

$$x \mapsto f(x) = e^x \quad \text{et} \quad x \mapsto g(x) = \ln(1 + x).$$

Formule de Taylor-Young au voisinage de 0 à l'ordre 2:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + o(x^2).....(\mathbf{1pt}). \\ O\grave{u} \quad \lim_{x \to 0} \frac{o(x^2)}{x^2} &= 0. \end{aligned}$$

On a $f(x) = f'(x) = f''(x) = e^x$ et $f(0) = f'(0) = f''(0) = e^0 = 1.(\mathbf{0.25pt})$.

Donc :

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2).(\mathbf{1pt}).$$

Ensuite, $g(0) = 0$, $(\mathbf{0.25pt})$.et

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{1+x} \quad et \quad g'(0) = 1.(\mathbf{0.5pt}). \\ g''(x) &= \frac{-1}{(1+x)^2} \quad et \quad g''(0) = -1.(\mathbf{0.5pt}). \end{aligned}$$

Ce qui fait que :

$$g(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2).(\mathbf{1pt}).$$

2. **En déduire** le $DL_2(0)$ de la fonction $x \mapsto h(x) = e^x \ln(1+x)$.

$$\begin{aligned} h(x) &= \left[1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right]\left[x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right] \\ h(x) &= x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2).(\mathbf{1pt}). \end{aligned}$$

3. En déduire **la limite**:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x\to 0} \frac{e^x \ln(1+x) - x}{x^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{2} + o(1)\right) \\ L &= \frac{1}{2}.(\mathbf{1pt}). \end{aligned}$$

Exercice 2 : (08.5 pts)

1. **(2.5 points).** En utilisant la **formule de l'Hôpital**, **montrer** que la fonction suivante est **dérivable** en 0:

$$x \mapsto f(x) = \tan\left(\frac{\pi}{2x+1}\right).$$

On a que f est bien définie au point 0 avec $f(0) = 0$, et

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\tan\left(\frac{\pi}{2x+1}\right)}{x}$$

Par la règle de l'Hôpital, on trouve :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{(x)'} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\left(\dfrac{\pi}{2x+1}\right)'\cdot\left(\dfrac{1}{\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2x+1}\right)}\right)}{1} \\
&= \lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{-2\pi}{(2x+1)^2}\right)\cdot\left(\frac{1}{\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2x+1}\right)}\right)\right] \\
&= -2\pi
\end{aligned}$$

Donc f est **dérivable** en 0 avec $f'(0)=-2\pi$.(**2.5 points**).

2. **Par parties**, calculer l'intégrale suivante : $I=\int x\sqrt{x+1}dx$.

On pose $\begin{cases} u'(x)=\sqrt{x+1} \\ v(x)=x \end{cases}$,

On trouve $\begin{cases} u(x)=\int (x+1)^{\frac{1}{2}}\,dx=\dfrac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \\ v'(x)=1 \end{cases}$.(**4 × 0.25 = 1pt**)

La formule d'intégration par parties nous donne:

$$\begin{aligned}
I &= \int u'v=[uv]-\int v'u \\
&= \frac{2}{3}x(x+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}\int (x+1)^{\frac{3}{2}}\,dx \\
I &= \frac{2}{3}x(x+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}\left[\frac{(x+1)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right]+C,(C\in\mathbb{R}).(\mathbf{1.5pt})
\end{aligned}$$

3. Par un **changement de variables**, calculer l'intégrale suivante :

$$J=\int\frac{xdx}{x^4+4}.$$

On pose $y=x^2$, on trouve : $dy=2xdx$, d'où $xdx=\frac{1}{2}dy$. (**1pt**).
En remplaçant dans J, on trouve:

$$\begin{aligned}
J &= \int\frac{\frac{1}{2}dy}{y^2+4}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}arctg\left(\frac{y}{2}\right)\right]+C \\
J &= \frac{1}{4}arctg\left(\frac{x^2}{2}\right)+C.,(C\in\mathbb{R}).(\mathbf{1pt}).
\end{aligned}$$

4. Résoudre l'équation différentielle à variables séparables suivante :

$$\begin{aligned}
x^2\ y+\sqrt{1+x^3}\ y' &= 0. \\
&\Rightarrow \sqrt{1+x^3}\ \frac{dy}{dx}=-x^2\ y \\
&\Rightarrow \frac{-x^2dx}{\sqrt{1+x^3}}=\frac{dy}{y}....(\mathbf{0.5pt}) \\
&\Rightarrow \int\frac{-x^2dx}{\sqrt{1+x^3}}=\int\frac{dy}{y} \\
&\Rightarrow -\frac{1}{3}\left[\frac{\sqrt{1+x^3}}{\frac{1}{2}}\right]+C=\ln|y|. \quad (C\in\mathbb{R}).(\mathbf{1\ point}).
\end{aligned}$$

L'étudiant peut s'arrêter là et avoir une note complète, c'est-à-dire que les solutions implicites sont aussi comptées juste.

Sinon,

$$y(x)=K.e^{-\frac{2}{3}\sqrt{1+x^3}}.\,(K\in\mathbb{R}).$$