الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Université Abou Bekr Belkaid جامعة آبي بكر بلقايد
Tlemcen Algérie تلمسان الجزائر

Faculté des sciences * 1ère Année MI-L1 INFO- L1 ING 2022-2023.**
Module : Algèbre 2 / Examen de rattrapage.

ice 01 : (8 points) Dans $\mathbb{R}^3$ on considère les sous ensembles suivants:

$$E_1 = \left\{(a+2b, -4b+5a, a) \in \mathbb{R}^3 / \ a, b \in \mathbb{R}\right\} \text{ et } E_2 = \left\{(c, -2c, 3c) \in \mathbb{R}^3 / \ c \in \mathbb{R}\right\}.$$

avec E_1 est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$.

(1) **(1.5 point)** Montrer que E_2 est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$.

(2) **(2 points)** Déterminer une base B_1 de E_1 et une base B_2 de E_2.

(3) (1 point) En déduire $\dim E_1$ et $\dim E_2$.

(4) **(1.5 point)** Montrer que : $\mathbb{R}^3 = E_1 + E_2$.

(5) **(2 points)** Déduire si la somme est directe ou non.

e 02 : **(12 points)** On considère l'application linéaire suivante :

$$\begin{array}{rcl} f & : & \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_2[x] \\ P & \mapsto & f(P) = -3 + P'(x) + (2x-1)P''(x). \end{array}$$

$\mathbb{R}_n[x]$: désigne l'ensemble des polynômes de degré inférieure ou égale à n.

(1) **(2 points)** Trouver la matrice associée à f dans les bases canoniques B_1 et B_2 respectivement de $\mathbb{R}_3[x]$ et $\mathbb{R}_2[x]$.

(2) Soient $B_1' = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ une base de $\mathbb{R}_3[X]$ avec : $w_1 = 4$, $w_2 = 6 - x, w_3 = 2 + 5x + x^2$ et $w_4 = -2 + 4x + 3x^2 - x^3$ et $B_2' = \{v_1, v_2, v_3\}$ avec $v_1 = -5$, $v_2 = 2 + 3x, v_3 = 6x + 2x^2$.

a) **(2 points)** Montrer que B_2' est une base de $\mathbb{R}_2[x]$.

b) **(1.5 point)** Trouver la matrice de passage P de la base B_1 vers B_1'.

c) **(1.5 points)** Trouver la matrice de passage Q de la base B_2 vers B_2'.

d) **(1.5 point)** Déterminer la matrice de passage de la base B_2' vers B_2.

e) **(1.5 point)** Trouver les composantes de $V = 5x^2 - 4x - 3$ dans B_2 ensuite dans B_2'.

f) **(2 points)** Trouver la matrice N la matrice associée à f relativement aux bases B_1' et B_2'.

Bon courage.

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Université Abou Bekr Belkaid جامعة أبي بكر بلقايد
Tlemcen Algérie تلمسان الجزائر

Faculté des sciences * 1ère Année MI-L1 INFO- L1 ING 2022-2023.**
Module : Algèbre 2 / Examen de rattrapage. (1H30mn)

Correction

ice 01 : (8 points) Dans $\mathbb{R}^3$ on considère les sous-ensembles suivants:

$$E_1 = \left\{(a+2b, -4b+5a, a) \in \mathbb{R}^3 /\ a, b \in \mathbb{R}\right\} \text{ et } E_2 = \left\{(c, -2c, 3c) \in \mathbb{R}^3 /\ c \in \mathbb{R}\right\}.$$

avec E_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

(1) Montrer que E_2 est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$?

1- Montrons que $E_2 \neq \varnothing$? **(0.5 point)**

$$(0,0,0) = (0, 0-2\times 0, 0) \in E_2 \Rightarrow E_2 \neq \varnothing.$$

2- Montrons que : **(0.5 point)**

$$\forall U_1 (c_1, -2c_1, 3c_1), U_2 (c_2, -2c_2, 3c_2) \in E_2,$$

$$U_1 + U_2 = ((c_1+c_2), -2(c_1+c_2), (c_1+c_2)) \in E_2.$$

3- **(0.5 point)**

$$\begin{aligned} \forall \alpha &\in \mathbb{R}, \forall U (c, -2c, 3c) \\ \alpha U &= (\alpha c, -2\alpha c, 3\alpha c) \in E_2. \end{aligned}$$

Conclusion :

$$E_2 \underset{s.e.v}{\subset} \mathbb{R}^3.$$

(2) Déterminer une base B_1 de E_1 et une base B_2 de E_2.

Pour E_1 : **(0.75 point)**

$$E_1 = \left\{(a+2b, -4b+5a, a) \in \mathbb{R}^3 /\ a, b \in \mathbb{R}\right\}.$$

$$\begin{aligned} \forall U &\in E_1, U = (a+2b, -4b+5a, a) \\ &= (a, 5a, a) + (2b, -4b, 0) \\ &= a\underbrace{(1,5,1)}_{V_1} + b\underbrace{(2,-4,0)}_{V_2} \\ E_1 &= Vect\left\{V_1, V_2\right\}. \end{aligned}$$

Pour libre : **(0.5 point)**

Dans $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$, on a le déterminant mineur :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow \{V_1, V_2\} \text{ est libre.}$$
$$\Rightarrow B_1 = \{V_1, V_2\} \text{ est une base de } E_1.$$

Pour E_2 : **(0.75 point)**

$$E_2 = \left\{(c, -2c, 3c) \in \mathbb{R}^3 / \ c \in \mathbb{R}\right\}.$$

$$\forall U \in E_2, U = (c, -2c, 3c) = c\underbrace{(1, -2, 3)}_{V_3}$$
$$E_2 = Vect\{V_3\} \Rightarrow B_2 = \{V_3\} \text{ est une base de } E_2.$$

(3) En déduire $\dim E_1$ et $\dim E_2$.

$$\dim E_1 = \underbrace{card\ B_1}_{\textbf{(0.25 point)}} = \underbrace{2}_{\textbf{(0.25 point)}} \text{ et } \dim E_2 = \underbrace{card\ B_2}_{\textbf{(0.25 point)}} = \underbrace{1}_{\textbf{(0.25 point)}}.$$

(4) Montrer que : $\mathbb{R}^3 = E_1 + E_2$.

a) **(0.25 point)** " $\supset$ " Problème : $E_1 + E_2 \subset \mathbb{R}^3$?

$$E_1 \subset \mathbb{R}^3 \text{ et } E_2 \subset \mathbb{R}^3 \Rightarrow E_1 + E_2 \subset \mathbb{R}^3.$$

b) " $\subset$ "Problème : $\mathbb{R}^3 \subset E_1 + E_2$?

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x, y, z) = \underbrace{(a + 2b, -4b + 5a, a)}_{E_1} + \underbrace{(c, -2c, 3c)}_{E_2} \textbf{ (0.5 point)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = a + 2b + c \\ y = -4b + 5a - 2c \quad \textbf{(0.5 point)} \\ z = a + 3c \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - z = 2b - 2c \\ y - 5z = -4b - 17c \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x - z = 2b - 2c \\ y - 5z = -4b - 17c \end{cases}$$
$$\Rightarrow 2x - 2z + y - 5z = -21c$$

$$\Rightarrow c = \frac{-2x + 7z - y}{21}. \textbf{ (0.25 point)}$$
$$\Rightarrow a = z - 3c = \frac{2x - 14z + y}{21}. \textbf{ (0.25 point)}$$
$$\Rightarrow b = \frac{x - a - c}{2} = \frac{x - \frac{2x - 14z + y}{21} - \frac{-2x + 7z - y}{21}}{2}$$
$$\Rightarrow b = \frac{21x + 7z}{42} = \frac{x}{2} + \frac{z}{3}. \textbf{ (0.25 point)}$$

(5) Déduire si la somme est directe ou non.

La somme est directe des deux sous-espaces vectoriels E_1 et E_2 dans $\mathbb{R}^3$ ou dire E_1 et E_2 sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$ qu'on la note par :

$$\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_2.$$

1ère méthode :

$$\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbb{R}^3 = E_1 + E_2 \\ \text{et} \\ E_1 \cap E_2 = \{(0,0,0)\}. \end{cases} \quad \textbf{(0.5 point)}$$

Il reste à montrer que :

$$E_1 \cap E_2 = \{(0,0,0)\}?$$

a) " $\supset$ "

$$(0,0,0) \in E_1 \text{ et } (0,0,0) \in E_2 \Rightarrow \{(0,0,0)\} \subset E_1 \cap E_2. \textbf{(0.25 point)}$$

b) " $\subset$ " **(0.75 point)**

$$\begin{aligned}
\forall U \quad \in \quad E_1 \cap E_2 \Rightarrow & \begin{cases} U \in E_1 \Rightarrow U = (a+2b, -4b+5a, a) \\ \text{et} \\ U \in E_2 \Rightarrow U = (c, -2c, 3c) \end{cases} \\
\Rightarrow & \begin{cases} a + 2b = c \\ -4b + 5a = -2c \\ a = 3c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7a = 0 \\ a = 3c \end{cases} \\
\Rightarrow & \quad a = 0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow b = 0. \\
\Rightarrow & \quad U = (0,0,0) \Rightarrow E_1 \cap E_2 \subset \{(0,0,0)\} \\
\Rightarrow & \quad E_1 \cap E_2 = \{(0,0,0)\}.
\end{aligned}$$

Donc la somme est directe dans $\mathbb{R}^3$.

2ème méthode :

$$\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \dim \mathbb{R}^3 = \dim E_1 + \dim E_2 \\ \text{et} \\ E_1 \cap E_2 = \{(0,0,0)\}. \end{cases} \quad \textbf{(0.5 point)}$$

On a :

$$\dim E_1 + \dim E_2 = 2 + 1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3,$$

Le reste comme la 1ère méthode.

3ème méthode :

Pour $B = \{V_1, V_2, V_3\}$ il suffit de montrer que B est une base de $\mathbb{R}^3$ pour que la somme soit directe dans $\mathbb{R}^3$. **(0.25 point)**

$$card\ B = 3 = \dim \mathbb{R}^3, \ \textbf{(0.25 point)}$$

donc il suffit de montrer qu'elle est libre. **(1 point)**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 5 & -4 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \underbrace{1 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{vmatrix}}_{0} + \underbrace{(3) \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}}_{-42}$$

$$= -42 \neq 0 \Rightarrow B \text{ est libre donc c'est une base de } \mathbb{R}^3$$

$$\Rightarrow \text{ donc la somme est directe dans } \mathbb{R}^3.$$

e 02 : **(12 points)** On considère l'application linéaire suivante :

$$\begin{array}{rcl} f & : & \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & f(P) = -3 + P'(X) + (2X-1)P''(X). \end{array}$$

$\mathbb{R}_n[X]$: désigne l'ensemble des polynômes de degré inférieure ou égale à n.

(1) Trouver la matrice associée à f dans les bases canoniques B_1 et B_2 respectivement de $\mathbb{R}_3[X]$ et $\mathbb{R}_2[X]$.

$$\begin{aligned} f(1) &= -3. \textbf{ (0.25 point)} \\ f(X) &= -2. \textbf{ (0.25 point)} \\ f(X^2) &= -5 + 6X. \textbf{ (0.25 point)} \\ f(X^3) &= -3 - 6X + 15X^2. \textbf{ (0.25 point)} \end{aligned}$$

Donc :

$$M(f, B_1, B_2) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} f(1) & f(X) & f(X^2) & f(X^3) \end{array} \\ \underbrace{\begin{pmatrix} -3 & -2 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}}_{\textbf{(0.5 point)}} \end{array} \begin{array}{c} \textbf{(0.5 point)} \\ 1 \\ X \\ X^2 \end{array}$$

(2) Soient $B_1' = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ une base de $\mathbb{R}_3[X]$ avec : $w_1 = 4$, $w_2 = 6 - X, w_3 = 2 + 5X + X^2$ et $w_4 = -2 + 4X + 3X^2 - X^3$ et $B_2' = \{v_1, v_2, v_3\}$ avec $v_1 = -5$, $v_2 = 2 + 3X, v_3 = 6X + 2X^2$.

a) Montrer que B_2' est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

$$card B_2' = \dim \mathbb{R}_2[X] = 3, \textbf{(0.5 point)}$$

alors il suffit de démontrer qu'elle est libre.

$$\begin{vmatrix} -5 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -30 \neq 0 \Rightarrow B_2' \text{ est libre, donc c'est une base.} \textbf{(1 point)}$$

b) **(1.5 point)** Trouver la matrice de passage P de la base B_1 vers B_1'.

$$p = \underbrace{\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array}}_{\textbf{(1 point)}} \quad \begin{array}{c} \textbf{(0.5 point)} \\ 1 \\ X \\ X^2 \\ X^3 \end{array}$$

c) **(1.5 points)** Trouver la matrice de passage Q de la base B_2 vers B_2'.

$$Q = \underbrace{\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -5 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array}}_{\textbf{(1 point)}} \quad \begin{array}{c} \textbf{(0.5 point)} \\ 1 \\ X \\ X^2 \end{array}$$

d) **(1.5 point)** Déterminer la matrice de passage de la base B_2' vers B_2.

$$Q^{-1} = \frac{1}{\det Q} {}^t comQ.$$

$$comQ = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ -4 & -10 & 0 \\ 12 & 30 & -15 \end{pmatrix}$$

$$Q^{-1} = \underbrace{\frac{-1}{30} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & X & X^2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 6 & -4 & 12 \\ 0 & -10 & 30 \\ 0 & 0 & -15 \end{pmatrix} \end{array}}_{\textbf{(0.25 det +0.75 le reste)}} \quad \begin{array}{c} \textbf{(0.5 point)} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array}$$

e) **(1.5 point)** Trouver les composantes de $V = 5X^2 - 4X - 3$ dans B_2 ensuite dans B_2'.

$$V_{B_2} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} \rightarrow \textbf{(0.5 point)}$$

$$\underbrace{V_{B_2'} = Q^{-1} V_{B_2}}_{\textbf{(0.25 point)}} = \frac{-1}{30} \begin{pmatrix} 6 & -4 & 12 \\ 0 & -10 & 30 \\ 0 & 0 & -15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{-1}{30} \begin{pmatrix} 58 \\ 190 \\ -75 \end{pmatrix} . \rightarrow \textbf{(3} \times \textbf{0.25 point)}$$

f) **(2 points)** Trouver la matrice N la matrice associée à f relativement aux bases B_1' et B_2'.

$$\begin{aligned}
N &= \underbrace{Q^{-1}M\left(f,B_1,B_2\right)P}_{\textbf{(0.5 point)}} \\
&= \frac{-1}{30}\begin{pmatrix} 6 & -4 & 12 \\ 0 & -10 & 30 \\ 0 & 0 & -15 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & -2 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{-1}{30}\underbrace{\begin{pmatrix} -18 & -12 & -54 & 186 \\ 0 & 0 & -60 & 510 \\ 0 & 0 & 0 & -225 \end{pmatrix}}_{\textbf{(0.75 point)}}\begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$= N = \underbrace{\frac{-1}{30}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} f(w_1) & f(w_2) & f(w_3) & f(w_4) \end{array} \\ \begin{pmatrix} -72 & -96 & -150 & -360 \\ 0 & 0 & -60 & -690 \\ 0 & 0 & 0 & 225 \end{pmatrix} \end{array}}_{\textbf{(0.75 point)}} \begin{array}{c} \textbf{(0.5 point)} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array}$$