Université Aboubekr Belkaid-Tlemcen
Module : Algèbre 2 Epreuve finale " Le corrigé".
1ère Année 1 INFO-ING-MI 2022-2023.

Exercice 01 : (3 points) E est une somme directe de F et G ou dire F et G sont supplémentaires **(0.5 point)** dans E si et seulement si :

$$\begin{aligned} 1)\ (\mathbf{0.25\ point}) &\leftharpoondown E = F \oplus G \Leftrightarrow E = F + G \text{ et } F \cap G = \{0_E\}\,.\ (\mathbf{0.75\ point}) \\ 2)\dim E &= \dim F + \dim G \text{ et } F \cap G = \{0_E\}\,.(\mathbf{0.75\ point}) \\ &\quad 3) B_F \cup B_G \text{ forment une base de } E.(\mathbf{0.75\ point}) \end{aligned}$$

Exercice 02 : (4 points)

$$M = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 7 \\ -4 & -3 & 8 \\ -3 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

1)

$$\begin{aligned} \det M &= \begin{vmatrix} -4 & -2 & 7 \\ -4 & -3 & 8 \\ -3 & -2 & 6 \end{vmatrix} \\ &= \underbrace{-4\begin{vmatrix} -3 & 8 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -4 & 8 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} -4 & -3 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}}_{(\mathbf{0.5\ point})} \\ &= -4(-2) + 2 \times 0 + 7(-1) = 1.(\mathbf{0.5\ point}) \end{aligned}$$

2) $M^3 + M^2 - M - 3I$?

$$\begin{aligned} M^2 &= \begin{pmatrix} -4 & -2 & 7 \\ -4 & -3 & 8 \\ -3 & -2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & -2 & 7 \\ -4 & -3 & 8 \\ -3 & -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -4 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.(\mathbf{0.5\ point}) \\ M^3 &= \begin{pmatrix} -4 & -2 & 7 \\ -4 & -3 & 8 \\ -3 & -2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -4 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -2 & 9 \\ -8 & -3 & 12 \\ -5 & -2 & 8 \end{pmatrix}.(\mathbf{0.5\ point}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M^3 + M^2 - M - 3I &= \begin{pmatrix} -6 & -2 & 9 \\ -8 & -3 & 12 \\ -5 & -2 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -4 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & -2 & 7 \\ -4 & -3 & 8 \\ -3 & -2 & 6 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = -2I.(\mathbf{0.5\ point}) \end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned}
M^3+M^2-M-3I &= -2I \Leftrightarrow M^3+M^2-M=I \\
&\Leftrightarrow M\left(M^2+M-I\right)=\left(M^2+M-I\right)M=I \text{ } (\mathbf{0.25\ point} + \mathbf{0.25\ point}) \\
&\Rightarrow M^{-1}=M^2+M-I.(\mathbf{0.25\ point}) \\
&\Rightarrow M^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -4 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -4 & -2 & 7 \\ -4 & -3 & 8 \\ -3 & -2 & 6 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\Rightarrow M^{-1}=\begin{pmatrix} -2 & -2 & 5 \\ 0 & -3 & 4 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}. \ (\mathbf{0.75\ point})
\end{aligned}$$

Exercice 03 : (13 points) On considère l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$f(x,y,z)=(x+3y-2z,-2x+4y+z,7x+y-8z).$$

(1) Déterminer une base du noyau de f et sa dimension.

Le noyau :

$$\ker f=\left\{U(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/f(U)=(0,0,0)\right\}.(\mathbf{0.5\ point})$$

$$\begin{aligned}
f(U) &= (0,0,0)\Leftrightarrow f(x,y,z)=(0,0,0) \\
&\Rightarrow (x+3y-2z,-2x+4y+z,7x+y-8z)=(0,0,0) \\
&\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x+3y-2z=0 \\ -2x+4y+z=0 \quad (\mathbf{0.25\ point}) \\ 7x+y-8z=0 \end{array}\right. \\
&\Rightarrow AX=B,
\end{aligned}$$

avec :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -2 & 4 & 1 \\ 7 & 1 & -8 \end{pmatrix}_{3,3}, X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{3,1} \text{ et } B=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Calculons A^{-1} s'il existe ?

$$\begin{aligned}
\det A &= \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -2 & 4 & 1 \\ 7 & 1 & -8 \end{vmatrix}=(1)\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -8 \end{vmatrix}-3\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 7 & -8 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} \\
&= 0\Rightarrow A \text{ n'est pas inversible.}
\end{aligned}$$

Dans ce cas :

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} &= 10\neq 0\Rightarrow rang A=2 \\
&\Rightarrow \dim \operatorname{Im} f=2.(\mathbf{0.5\ point})
\end{aligned}$$

Mais

$$\dim\ker f+\dim\operatorname{Im} f=\dim\mathbb{R}^3\Rightarrow \dim\ker f=1.\textbf{(0.5 point)}$$

$$\left\{\begin{array}{l} x+3y-2z=0\\ -2x+4y+z=0\\ 7x+y-8z=0\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}10y-3z=0\\ 30y-9z=0\end{array}\right.$$

$$\begin{array}{rcl} & \Rightarrow & z=\frac{10}{3}y\Rightarrow x=-3y+2\left(\frac{10}{3}y\right)=\frac{11}{3}y\\ \ker f & = & \left\{\left(\frac{11}{3}y,y,\frac{10}{3}y\right),y\in\mathbb{R}\right\}\\ & \Rightarrow & \ker f=Vect\left\{v\right\},v=\left(\frac{11}{3},1,\frac{10}{3}\right).\textbf{(0.5 point)}\end{array}$$

(Ici on peut passer directement à $\dim\ker f$ sans $\det A$)

d) Déterminons $\operatorname{Im} f$.

$$\begin{array}{rcl}\operatorname{Im} f & = & Vect\left\{f(1,0,0),f(0,1,0),f(0,0,1)\right\}\ \textbf{(0.5 point)}\\ & = & Vect\left\{(1,-2,7),(3,4,1),(-2,1,-8)\right\}\\ & = & Vect\left\{\underbrace{(1,-2,7)}_{V_1},\underbrace{(3,4,1)}_{V_2}\right\},(\text{ car }\dim\operatorname{Im} f=2)\end{array}$$

avec

$$B=\left\{V_1,V_2\right\}\text{ est une base de l'image. }\textbf{(0.5 point)}$$

(2) a) L'application f est-elle injective?

$$\ker f\neq\left\{(0,0,0)\right\}\Rightarrow f\text{ n'est pas injective. }\textbf{(0.5 point)}$$

b) Déduire si f est surjective?

$$\dim\operatorname{Im} f=2\neq\mathbb{R}^3\Rightarrow f\text{ n'est surjective. }\textbf{(0.5 point)}$$

(3) Trouvons la matrice M associée à f relativement à la base canonique B de $\mathbb{R}^3$.

$$f(x,y,z)=(x+3y-2z,-2x+4y+z,7x+y-8z).$$

$f\ (e_1)=(1,-2,7)\,,f\ (e_2)=(3,4,1)$ et $f\ (e_3)=(-2,1,-8)\,,$ **(3 ×0.25 point)**

alors: (**0.5 point sur la matrice et 0.25 point sur l'écriture des vecteurs)**

$$M=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f\ (e_1) & f\ (e_2) & f\ (e_3)\end{array}\\ \left(\begin{array}{ccc}1 & 3 & -2\\ -2 & 4 & 1\\ 7 & 1 & -8\end{array}\right)\end{array}\quad\begin{array}{c} e_1\\ e_2\\ e_3\end{array}.$$

(4) Soit $B' = \{e_1', e_2', e_3'\}$ avec $e_1' = (-2,3,4)$, $e_2' = (1,-2,-2)$ et $e_3' = (2,1,3)$.

a) Montrons que B' est une base de $\mathbb{R}^3$.

$$cardB' = 3 = \dim \mathbb{R}^3, \textbf{(0.25 point)}$$

alors il suffit de montrer que B' est libre.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \end{vmatrix} &= -2\underbrace{\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}}_{=-4} - \underbrace{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}}_{=5} + 2\underbrace{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}}_{=2} \\ &= 7 \neq 0 \textbf{ (0.5 point)} \Rightarrow B' \text{ est libre} \Rightarrow B' \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.\textbf{(0.5 point)} \end{aligned}$$

b) Trouvons la matrice de passage P de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base B'.

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e_1' & e_2' & e_3' \end{array} \\ \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} .$$

(0.5 point sur la matrice et 0.5 point sur l'écriture des vecteurs)

c) Trouvons la matrice de passage de la base B' à la base B .

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P} {}^t comP = \frac{1}{7} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -4 & -7 & 5 \\ -5 & -14 & 8 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1' \\ e_2' \\ e_3' \end{array} .$$

(0.75 point sur la matrice et 0.5 point sur l'écriture des vecteurs)

d) Si V est de composante $\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ dans la base canonique, déterminons alors les composantes de V dans la base B'.

$$V_{B'} = P^{-1}\ V_B,$$

$$V_{B'} = \underbrace{P^{-1}\ V_B}_{\textbf{(0.5 point)}} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -4 & -7 & 5 \\ -5 & -14 & 8 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{46}{7} \\ \frac{89}{7} \\ \frac{5}{7} \end{pmatrix} \textbf{(0.75 point)}.$$

e) Trouvons la matrice N associée à f relativement à la base B'.

$$\begin{aligned}
N &= \underbrace{P^{-1}MP}_{\textbf{(0.5 point)}} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -4 & -7 & 5 \\ -5 & -14 & 8 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -2 & 4 & 1 \\ 7 & 1 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 45 & -35 & -39 \\ 79 & -63 & -68 \\ 9 & 7 & -12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix} \ \textbf{(1 point)} \\
&= \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -351 & 193 & -62 \\ -619 & 341 & -109 \\ -45 & 19 & -11 \end{pmatrix} \ \textbf{(1 point)}
\end{aligned}$$