Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen.
Faculté des Sciences

$1^{ère}$ année LMD (2022/2023).
MI-S2, durée 1h:30'.

Remplacement de l'Examen Final -Analyse 2-MI.

Question de cours (05 points)

Résoudre l'EDO du $\mathbf{2^{ème}}$ ordre suivante:

$$y'' + 2y' + 2y = e^{-x}\sin x.$$

Exercice (15 points) Les questions suivantes sont complètement indépendantes.

1. **(5 points).** En utilisant les **développements limités**, calculer la limite suivante:

$$L = \lim_{x\to+\infty}\left[\ln x.\ln\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)\right]$$

2. **(7 points). Calculer** les intégrales suivantes :

$$a)\ \ I = \int \sqrt{9+x^2}dx \quad ; \quad b)\ \ J = \int \frac{shx\ chx}{(sh^2x-1)(shx+sh^2x+1)}dx$$

3. **(3 points). Résoudre** l'EDO **homogène** d'ordre **1** suivante :

$$x^2y' + xy = y^2 + x^2, (x \neq 0).$$

On rappelle que :

1/ $\forall\alpha\in\mathbb{R}, ch^2(\alpha) = \frac{1}{2}(ch(2\alpha)+1)$ et $sh(2\alpha) = 2\ sh(\alpha)\, ch(\alpha)$.

2/ $\ln(1+t) = t + o(t)$ au voisinage de 0.

Remarque: L'usage des téléphones portables est strictement interdit. Bon courage.

Correction du remplacement de l'Examen Final -Analyse 2- MI.

Question de cours (05 points)

$$y'' + 2y' + 2y = e^{-x}\sin x...(1).$$

1. **ESSM** $y'' + 2y' + 2y = 0$

$$(EC) \quad : \quad r^2 + 2r + 2 = 0$$
$$\Rightarrow \quad r = -1 \pm i = \alpha \pm i\beta \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 1 \end{cases}.$$

On note par y_h la solution de l'équation homogène associée à (1).

Alors: $y_h(x) = e^{-x}\left[C_1\cos x + C_2\sin x\right];(C_1, C_2 \in \mathbb{R})$. **(1point).**

EASM On pose

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-x}\sin x \\ &= e^{\lambda x}[P_1(x)\cos(\theta x) + P_2(x)\sin(\theta x)] \end{aligned}$$
$$\text{Avec} \begin{cases} \lambda = -1 \\ \theta = 1 \\ P_1(x) = 0 \Rightarrow \deg(P_1(x)) = 0 \\ P_2(x) = 1 \Rightarrow \deg(P_2(x)) = 0 \end{cases}$$

On note par y_p la solution particulière de l'équation donnée en (1).

Donc y_p est sous la forme suivante :

$$y_p(x) = e^{\lambda x}x^m\left[Q_1(\theta x)\cos x + Q_2(\theta x)\sin x\right].$$

*) Puisque $\lambda + i\theta = -1 + i$ est une solution de l'(EC), alors $m = 1$.

*) Puisque $\max(\deg(P_1(x)), \deg(P_2(x))) = 0$ alors $\deg(Q_1(x)) = \deg(Q_2(x)) = 0$.

Ce qui fait que $y_p(x) = e^{-x}x\left[a\cos x + b\sin x\right]$ **(0.5 point)** où a et b sont des constantes à déterminer.

On a :

$$y_p'(x) = e^{-x}\left[(a + (b-a)x)\cos x + (b - (a+b)x)\sin x\right]. \ (\mathbf{1point}).$$

Et

$$y_p''(x) = e^{-x}\left[(2b - 2a - 2bx)\cos x - (2a + 2b - 2ax)\sin x\right]. \ (\mathbf{1point}).$$

En remplaçant dans l'équation (2.), on trouve :

$$2b\cos x - 2a\sin x = \sin x$$

Par identification, on obtient: $\begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = 0 \end{cases}$.**(0.5point).**

Ce qui fait que

$$y_p(x) = -\frac{1}{2}e^{-x}x\cos x. \ (\mathbf{0.5point}).$$

Finalement,

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = e^{-x}\left[\left(C_1 - \frac{1}{2}x\right)\cos x + C_2\sin x\right]; \ (C_1, C_2 \in \mathbb{R}).(\mathbf{1point}).$$

Exercice (15 points) Les questions suivantes sont complètement indépendantes.

1. En utilisant les développements limités, calculer la limite suivante:
$$L = \lim_{x\to+\infty}\left[\ln x.\ln\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)\right].$$

On a
$$\frac{\ln(x+1)}{\ln x} = \frac{\ln x + \ln(1+\frac{1}{x})}{\ln x} = 1 + \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\ln x}.(\mathbf{1point}).$$

Et comme $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ et $\ln(1+t) = t + o(t)$ au voisinage de 0, alors $\ln(1+\frac{1}{x}) = \frac{1}{x} + o(\frac{1}{x}).(\mathbf{1point})$.

Rappelons que $\lim_{x\to+\infty} xo(\frac{1}{x}) = 0$

S'en suit:
$$\begin{aligned}
\frac{\ln(x+1)}{\ln x} &= 1 + \frac{\frac{1}{x}+o(\frac{1}{x})}{\ln x} \\
&= 1 + \frac{1}{x\ln x} + o(\frac{1}{x\ln x}) \\
&\Rightarrow \ln\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{x\ln x} + o(\frac{1}{x\ln x})\right) \quad (\mathbf{1point}).
\end{aligned}$$

Or $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x\ln x}\right) = 0$, donc de la même manière, on obtient:
$$\ln\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right) = \frac{1}{x\ln x} + o(\frac{1}{x\ln x}).(\mathbf{1point}).$$

$$\begin{aligned}
\text{Ce qui fait que} &: \left[\ln x.\ln\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)\right] = \ln x\left[\frac{1}{x\ln x} + o(\frac{1}{x\ln x})\right]. \\
\text{Ainsi} &: \left[\ln x.\ln\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)\right] = \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \\
\text{Et donc} &: L = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right] = 0. \quad (\mathbf{1point}).
\end{aligned}$$

2. **Calculer** les intégrales suivantes :

a) $I = \int\sqrt{9+x^2}dx$
1$^{\text{ère}}$ méthode

On pose $x = 3shy$, on trouve $dx = 3chy.dy$ (**0.5point**).
Donc,

$$\begin{aligned}
I &= \int\sqrt{9+(3shy)^2}\,.(3chy)\ dy \\
&= \int\sqrt{9(1+sh^2y)}\,.(3chy)\ dy \\
&= 9\int|chy|\ chydy \quad (\mathbf{0.5point}).
\end{aligned}$$

Mais comme $\forall y \in \mathbb{R}$, $chy > 0$. alors:

$$\begin{aligned}
I &= 9\int ch^2y\ dy \quad (\mathbf{0.5point})\\
&= \frac{9}{2}\int (ch(2y)+1)\ dy\\
&= \frac{9}{2}\left[\frac{1}{2}sh(2y)+y\right]+C\\
I &= \frac{9}{4}sh(2y)+\frac{9}{2}y+C, \qquad (\mathbf{0.5point}).
\end{aligned}$$

Puisque $sh(2y) = 2shychy$ alors $I = \frac{9}{2}sh(y)chy + \frac{9}{2}y + C$, et comme $x = 3shy$ alors:

$$\begin{cases}
shy = \dfrac{x}{3}\\
y = \arg sh\left(\dfrac{x}{3}\right)\\
chy = \sqrt{1+sh^2y} = \sqrt{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2} = \frac{1}{3}\sqrt{9+x^2}
\end{cases}$$

Finalement :

$$I = \frac{1}{2}x\sqrt{9+x^2} + \frac{9}{2}\arg sh\left(\frac{x}{3}\right) + C, (C\in\mathbb{R}).(\mathbf{1point}).$$

$2^{\text{ème}}$ méthode

On procède par parties :

On pose $\begin{cases} u'(x) = 1\\ v(x) = \sqrt{9+x^2}\end{cases}$, $(\mathbf{0.5point})$

On trouve $\begin{cases} u(x) = x\\ v'(x) = \frac{1}{2}\dfrac{(2x)}{\sqrt{9+x^2}} = \dfrac{x}{\sqrt{9+x^2}}\end{cases}$ $(\mathbf{0.5point})$

Donc

$$\begin{aligned}
I &= \left[x\sqrt{9+x^2}\right] - \int \frac{x^2}{\sqrt{9+x^2}}dx\\
&= \left[x\sqrt{9+x^2}\right] - \int \frac{9+x^2-9}{\sqrt{9+x^2}}dx\\
&= \left[x\sqrt{9+x^2}\right] - \int \frac{9+x^2}{\sqrt{9+x^2}}dx + \int \frac{9}{\sqrt{9+x^2}}dx(\mathbf{0.5point})\\
I &= \left[x\sqrt{9+x^2}\right] - I + 9\int \frac{1}{\sqrt{9+x^2}}dx(\mathbf{0.5point})\\
&\Rightarrow\ 2I = \left[x\sqrt{9+x^2}\right] + 9\left[\arg sh\left(\frac{x}{3}\right)\right] + C
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2}x\sqrt{9+x^2} + \frac{9}{2}\arg sh\left(\frac{x}{3}\right) + C, (C\in\mathbb{R}).(\mathbf{1point}).$$

b)

$$J = \int \frac{shx\ chx}{(sh^2x-1)(shx+sh^2x+1)}dx$$

On pose $y = shx$, on trouve $dy = chxdx$, donc

$$J=\int \frac{ydy}{\left(y^2-1\right)\left(y^2+y+1\right)}=\int f(y)dy \quad (\mathbf{1point}).$$

On a

$$\begin{aligned} \frac{y}{\left(y^2-1\right)\left(y^2+y+1\right)} &= \frac{A}{y-1}+\frac{B}{y+1}+\frac{Cy+D}{y^2+y+1}\,(\mathbf{1point}) \\ D_f &= \mathbb{R}/\{-1,1\} \end{aligned} \qquad \text{(Fraction)}$$

On multiplie toute l'équation au-dessus par $(y-1)$, on trouve:

$$\forall y\in\mathbb{R}/\{-1\}, \frac{y}{(y+1)\left(y^2+y+1\right)}=A+\frac{B\,(y-1)}{y+1}+\frac{(Cy+D)\,(y-1)}{y^2+y+1}.$$

Nous prenons $y=1$ pour avoir :

$$A=\frac{1}{6}$$

De même, on multiplie toute l'équation appelée $(Fraction)$ par $(y+1)$, on trouve:

$$\forall y\in\mathbb{R}/\{1\}, \frac{y}{(y-1)\left(y^2+y+1\right)}=\frac{A\,(y+1)}{y-1}+B+\frac{(Cy+D)\,(y+1)}{y^2+y+1}$$

On choisit maintenant de prendre $y=-1$, on trouve directement:

$$B=\frac{1}{2}$$

Maintenant on revient à notre équation donnée en $(Fraction)$:

$$\forall y\in D_f, \frac{y}{\left(y^2-1\right)\left(y^2+y+1\right)}=\frac{A}{y-1}+\frac{B}{y+1}+\frac{Cy+D}{y^2+y+1}$$

Vu que nous avons déjà calculé A et B, nous prenons directement $y=0$ pour trouver le D, comme suit :

$$\begin{aligned} 0 &= -A+B+D \\ &\Rightarrow D=-\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Et enfin, nous multiplions toute l'équation $(Fraction)$ par y et nous passons à la limite quand y tend vers $+\infty$:

$$\begin{aligned} \forall y &\in D_f, \quad (y.(Fraction)) \Leftrightarrow \frac{y^2}{\left(y^2-1\right)\left(y^2+y+1\right)}=\frac{Ay}{y-1}+\frac{By}{y+1}+\frac{(Cy+D)\,y}{y^2+y+1} \\ &\Rightarrow \lim_{y\to+\infty}\frac{y^2}{\left(y^2-1\right)\left(y^2+y+1\right)}=\lim_{y\to+\infty}\left[\frac{Ay}{y-1}+\frac{By}{y+1}+\frac{(Cy+D)\,y}{y^2+y+1}\right] \\ &\Rightarrow 0=A+B+C \\ &\Rightarrow C=-\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Donc:

$$\forall y\in D_f,\ \frac{y}{\left(y^2-1\right)\left(y^2+y+1\right)}=\frac{\frac{1}{6}}{y-1}+\frac{\frac{1}{2}}{y+1}+\frac{-\frac{2}{3}y-\frac{1}{3}}{y^2+y+1}\,(\mathbf{1point})$$

Il ne reste plus qu'à intégrer:

$$I=\int \frac{ydy}{\left(y^2-1\right)\left(y^2+y+1\right)}=\frac{1}{6}\int \frac{dy}{y-1}+\frac{1}{2}\int \frac{dy}{y+1}-\frac{1}{3}\int \frac{2y+1}{y^2+y+1}dy$$

$$I=\frac{1}{6}\ln|y-1|+\frac{1}{2}\ln|y+1|-\frac{1}{3}\left[\ln\left|y^2+y+1\right|\right]+C,(C\in\mathbb{R}).$$

Au final,

$$I=\frac{1}{6}\ln|shx-1|+\frac{1}{2}\ln|shx+1|-\frac{1}{3}\ln\left(sh^2x+shx+1\right)+C,(C\in\mathbb{R}).(\textbf{1point})$$

3. Résoudre l'EDO **homogène d'ordre 1** suivante :

$$x^2y^{'}+xy=y^2+x^2,(x\neq 0)...(2)$$

En divisant toute l'équation par x^2, (rappellons que $x\neq 0$) on trouve:

$$\begin{aligned}(2)\quad &\Leftrightarrow\quad y^{'}+\frac{y}{x}=\frac{y^2+x^2}{x^2},(x\neq 0).\\ &\Leftrightarrow\quad y^{'}+\frac{y}{x}=\frac{y^2}{x^2}+1....(*)\end{aligned}$$

On pose $u=\dfrac{y}{x}$, on trouve $y=ux$ et $y'=u'x+u$. (**1point**)
En remplaçant dans $(*)$, on obtient:

$$\begin{aligned}u^{'}x+u+u &= u^2+1\\ u^{'}x &= u^2-2u+1\\ &= (u-1)^2\end{aligned}$$

Qui est une EDO à variables séparables en u puisque:

$$\frac{dx}{x}=\frac{du}{(u-1)^2}$$

Nous allons la résoudre facilement en:

$$\ln|x|+C=-\frac{1}{u-1},(C\in\mathbb{R}).(\textbf{1point})$$

Nous allons d'abord tirer u puis revenir à la variable y, comme suit:

$$\begin{aligned}u \quad &= \quad -\frac{1}{\ln|x|+C}+1\\ &\Leftrightarrow\quad \frac{y}{x}=-\frac{1}{\ln|x|+C}+1\\ &\Leftrightarrow\quad y=-\frac{x}{\ln|x|+C}+x,(C\in\mathbb{R}).(\textbf{1point})\end{aligned}$$