



Epreuve Finale de l'Electricité

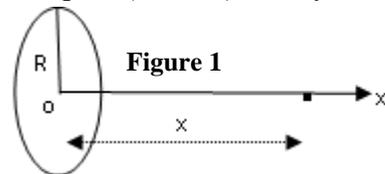
Questions de cours : (5pts)

- 1) Quelles sont les caractéristiques d'un conducteur en équilibre électrostatique ? (1pt)
- 2) Ecrire l'expression de la conductivité diélectrique d'un conducteur et donner la relation entre cette dernière et la résistivité? (1pt)
- 3) Donner avec démonstration l'expression de la capacité d'un condensateur sphérique? (3pts)

Exercice 1: (Partie 2 du CC) (10pts)

A- Une charge linéaire ($\lambda > 0$) est répartie uniformément sur une spire (anneau) de rayon R (Figure 1).

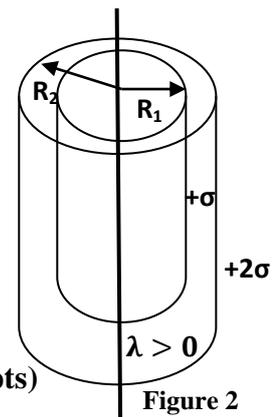
Calculer le champ électrostatique produit par la spire au point M situé sur l'axe (Ox) à une distance x du centre O . (3.5pts)



B- On considère deux cylindres coaxiaux infiniment longs, de rayon R_1 et R_2 tel que $R_1 < R_2$.

Le premier de rayon R_1 est chargé par une densité surfacique σ et le deuxième de rayon R_2 par une densité surfacique 2σ (Figure 2).

Sur l'axe du cylindre intérieur on place un fil conducteur de longueur infinie et de densité de charge linéique λ constante.



1- En appliquant le théorème de GAUSS, calculer le champ électrostatique en tout point de l'espace. (4.5pts)

2- En déduire le potentiel électrique à l'extérieur du système ($r > R_2$). (2pts)

Exercice 2: (5pts)

Soit le circuit représenté sur la figure 3:

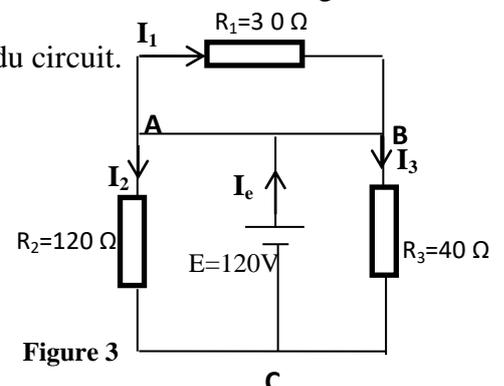
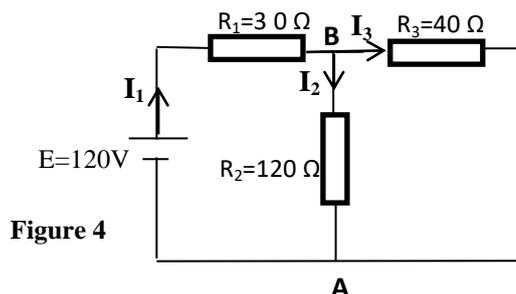
1- Calculer les courants circulant dans les trois résistances ainsi le courant engendré par le générateur. (2pts)

2- On rassemble maintenant les trois résistances et le générateur comme le montre la figure 4.

- Calculer I_1 , I_2 et I_3 . (2pts)

- Retrouver le courant I_1 en utilisant la résistance équivalente du circuit.

(1pt)



Bon courage



Corrigé de l'épreuve finale d'électricité

Question de cours: (5pts)

- 1- Les caractéristiques d'un conducteur en équilibre électrostatique sont : (1pts)
- Le champ électrique à l'intérieur du conducteur en équilibre électrostatique est nul.
 - Le potentiel électrique à l'intérieur du conducteur en équilibre électrostatique est constant.
 - La charge à l'intérieur du conducteur en équilibre électrostatique est nulle (la charge est surfacique).
 - Le champ au voisinage immédiat du conducteur en équilibre électrostatique est : $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$.

1- La conductivité est donnée par $\sigma = \frac{l}{R.S}$ (0.5pt) (l=la longueur du fil conducteur, S : la section du fil et R : la résistance du fil), la relation entre la résistivité ρ et la conductivité σ est : $\sigma = \frac{1}{\rho} = \frac{l}{R.S}$ (0.5pt)

2- (3pts) La capacité d'un condensateur sphérique :

$$C = \frac{Q}{(V_1 - V_2)} = \frac{Q}{U} \quad (0.5pts)$$

- Calcul du champ électrique :

Théorème de Gauss : $\oint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{Q}{\epsilon_0}$ (0.25pts)

La surface de Gauss dans ce cas est une sphère de centre O et de rayon r. Par raison de symétrie le champ est radial et constant en tout point de la surface de Gauss. (0.25pts)

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \oint E \cdot dS = E \cdot S = E4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (0.25pts)$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad (0.25pts)$$

- (01 pts) Calcul du potentiel :

$$\begin{cases} \vec{E} = -\overrightarrow{grad}V \\ E = E(r) \end{cases} \quad (0.25pts) \text{ donc } E = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow dV = -E dr \quad (0.25pts)$$

$$V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} dr = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (0.25pts)$$

$$V_1 - V_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \right) = U \quad (0.25pts)$$

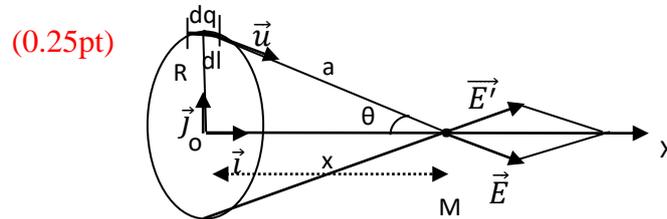
- La capacité d'un condensateur sphérique :

$$C = \frac{Q}{(V_1 - V_2)} = \frac{Q}{\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \right)}$$

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \quad (0.5pts)$$

Exercice 1 : (Partie 2 du CC) (10pts)

A- On cherche le champ élémentaire \vec{dE} créé par l'élément de Charge dq présent dans l'élément de longueur dl . ($dq=\lambda dl$). (0.5pt)



$$\vec{dE} = \frac{k dq}{a^2} \vec{u} \quad (0.5pt) \Rightarrow \vec{dE} = \frac{k \lambda dl}{R^2+x^2} (\cos\theta \vec{i} - \sin\theta \vec{j}) \quad (0.5pt)$$

D'après la relation de Pitagorth $a^2=R^2+x^2$ et $\vec{u} = \cos\theta \vec{i} - \sin\theta \vec{j}$

Nous avons une symétrie par rapport à l'axe (Ox) donc le champ électrique a une seule composante E_x , ($E_y=0$ (0.25pt)) et $\cos\theta = \frac{x}{a} = \frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}$ (0.25pt)

$$\text{Donc } dE_x = \frac{k \lambda}{R^2+x^2} \frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}} dl \Rightarrow dE_x = k \lambda \frac{x}{(R^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} dl, \quad (0.25pt)$$

(Il y a une seule variable (l) et x et R sont constantes par rapport à l).

$$E_x = k \lambda \frac{x}{(R^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi R} dl = k \lambda \frac{x}{(R^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} 2\pi R \quad (0.5pt) \text{ avec } k=1/(4\pi\epsilon_0)$$

$$\text{Donc } E = \frac{\lambda}{2\epsilon_0} \frac{x R}{(R^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (0.5pt)$$

B-(6.5pts) Pour calculer le champ électrique en tout point de l'espace, on applique le théorème de Gauss.

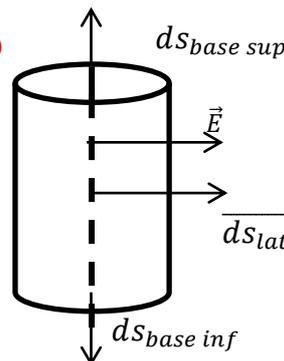
On prend comme surface de Gauss un cylindre de rayon r et de hauteur h (0.25pts)

$$\text{Le flux à travers la surface de Gauss est : } \Phi = \iint \vec{E} \cdot \vec{ds} = \frac{\Sigma Q_{int}}{\epsilon_0} \quad (0.5pts)$$

En raison de la symétrie, le champ est radial et constant en tout point de la surface de Gauss (0.5pts)

$$(\iint \vec{E} \cdot \vec{ds}_{base\ sup} = \iint \vec{E} \cdot \vec{ds}_{base\ inf} = 0 \text{ car } \vec{E} \perp \vec{ds}_{base\ sup} \text{ et } \vec{E} \perp \vec{ds}_{base\ inf}) \quad (0.25pts)$$

$$\Phi = \iint E \cdot ds_{lat} \quad (0.25pts) \quad \text{Car } (\vec{E} \parallel \vec{ds}_{lat}) \quad (0.25pts)$$



Le flux à travers la surface de Gauss sera :

$$\Phi = \iint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \iint E \cdot ds_{lat} = E \iint ds_{lat} = E \cdot S = E \cdot 2\pi r h = \frac{\Sigma Q_{int}}{\epsilon_0} \quad (*) \quad (0.5pts)$$

1- Calcul du champ :

1^{er} cas : $r < R$ $Q_{int} = \lambda \cdot h \quad (0.5pts) \Rightarrow E_1 = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0} \quad (0.5pts)$

2^{eme} cas : $R_1 \leq r < R_2$

$$Q_{int} = Q_1 + Q_2 = \lambda \cdot h + \iint \sigma ds = \lambda \cdot h + \sigma s = \lambda \cdot h + \sigma 2\pi R_1 h \quad (0.5pts)$$

$$E_2 2\pi r h = \frac{\lambda h + \sigma 2\pi R_1 h}{\epsilon_0} \Rightarrow E_2 = \frac{(\lambda + \sigma 2\pi R_1)}{2\pi \epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \quad (0.5pts)$$

3^{eme} cas : $r \geq R_2$ on a $Q_{int} = Q_1 + Q_2 + Q_3$

$$Q_1 = \lambda \cdot h, Q_2 = \sigma 2\pi R_1 h \quad \text{et} \quad Q_3 = 2\sigma 2\pi R_2 h \quad \text{donc} \quad Q_{int} = \lambda \cdot h + \sigma 2\pi h (R_1 + 2R_2) \quad (0.5pts)$$

$$E_3 2\pi r h = \frac{\lambda h + \sigma 2\pi h (R_1 + 2R_2)}{\epsilon_0} \Rightarrow E_3 = \frac{(\lambda + \sigma 2\pi (R_1 + 2R_2))}{2\pi \epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \quad (0.5pts)$$

2- Le potentiel à l'extérieur : $r \geq R_2$

$$\vec{E} = -\text{grad} V \text{ avec } E = E(r) \Rightarrow E = -\frac{dV}{dr} \text{ donc } V = -\int E \cdot dr \quad (0.5pts)$$

$$\text{On a } E_3 = \frac{(\lambda + \sigma 2\pi (R_1 + 2R_2))}{2\pi \epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}$$

$$V_3 = -\int E_3 \cdot dr = -\frac{(\lambda + \sigma 2\pi (R_1 + 2R_2))}{2\pi \epsilon_0} \int \frac{1}{r} \cdot dr = -\frac{(\lambda + \sigma 2\pi (R_1 + 2R_2))}{2\pi \epsilon_0} \ln r + C_3 \quad (0.5pts)$$

Exercice 2 : (5pts)

1- Calcul des courants I_2 et I_3 : (figure 3)

Maille 1 : $R_1 I_1 = 0 \Rightarrow I_1 = 0 \quad (0.5pts)$

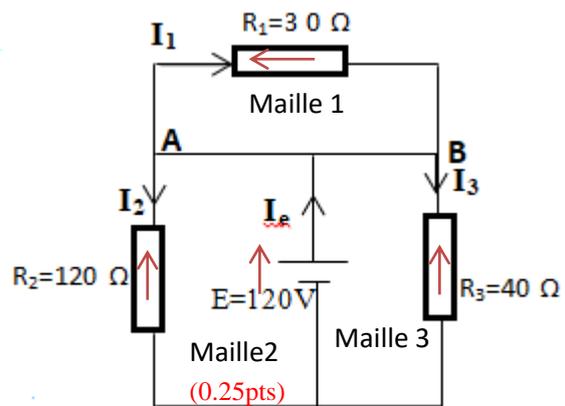
Maille 2 : $R_2 I_2 - E = 0 \Rightarrow I_2 = 1A \quad (0.5pts)$

Maille 3 : $R_3 I_3 - E = 0 \Rightarrow I_3 = 3A \quad (0.5pts)$

Calcul du courant débité par le générateur :

Nœud C on a : $I_2 + I_3 = I_e = 4A \quad (0.5pts)$

2- Calcul des courants I_1, I_2 et I_3 : (figure 4)



Nœud A: $I_1 = I_2 + I_3 \quad (0.25pts)$

Maille 1: $E - R_1 I_1 - R_2 I_2 = 0 \quad (0.25pts)$

Maille 2: $R_2 I_2 - R_3 I_3 = 0 \quad (0.25pts)$

$$I_1 = \frac{E - R_2 I_2}{R_1} = 4(1 - I_2)$$

$$\text{et } I_3 = \frac{R_2 I_2}{R_3} = 3I_2 \quad \text{donc } 4(1 - I_2) = I_2 + 3I_2$$

$$I_2 = 0.5A \quad (0.25pt) \quad \text{et} \quad I_1 = 2A \quad (0.25pt) \quad \text{donc} \quad I_3 = 3I_2 = 1.5A \quad (0.25pt)$$

3- Retrouver I_1 on utilisant R_{eq} :

$$R_{eq} = R_1 + (R_2 * R_3) / (R_2 + R_3) = 60\Omega \quad (0.5pt)$$

$$\text{On a } E = R_{eq} I_1 \quad \text{donc} \quad I_1 = E / R_{eq} = 120 / 60 = 2A \quad (0.5pt)$$

