Examen Final -Analyse 2-MI.

Question de cours (05 points)

Résoudre les EDO du **2ème** ordre suivantes:

1. **(2 points)** $y'' = 3x + 1.$
2. **(3 points)** $y'' + y = \cos x.$

Exercice (15 points) Les questions suivantes sont complètement indépendantes.

1. **(4 points).** En utilisant les **développements limités**, calculer la limite suivante:

$$L = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x+1}{2x-1} \right)^{2x}$$

2. **(3 points).** Étudier **la dérivabilité** de la fonction suivante sur $\mathbb{R}$:

$$x \longmapsto f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

3. **(5 points).** **Calculer** les intégrales suivantes :

$$a) \quad I = \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx \quad ; \quad b) \quad J = \int \frac{x-1}{x^2 + 2x + 3}\,dx$$

4. **(3 points).** **Résoudre** l'EDO **linéaire** d'ordre **1** suivante :

$$xy' + 2y = x^2 + 1. \quad (x > 0)\,.$$

On rappelle que :
1/ $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(\cos(2\alpha) + 1).$
2/ $\ln(1 + t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ au voisinage de 0.

Remarque: L'usage des téléphones portables est strictement interdit. Bon courage.

Correction de l'Examen Final -Analyse 2- MI.

Question de cours (05 points)
Résoudre les EDO du 2ème ordre suivantes:

1. Il suffit d'intégrer deux fois:

$$\begin{aligned} y'' &= 3x+1 \\ &\Rightarrow y' = \int (3x+1)\,dx \\ &\Rightarrow y' = \frac{3}{2}x^2 + x + C_1 \\ \text{Et} \quad y &= \int \left(\frac{3}{2}x^2 + x + C_1\right) dx \\ &\Rightarrow y(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C_1 x + C_2; \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})\,.(\textbf{2 points}) \end{aligned}$$

2. $y'' + y = \cos x$.
ÉSSM $y'' + y = 0$

$$\begin{aligned} (EC) \quad &: \quad r^2 + 1 = 0 \\ &\Rightarrow \quad r = \pm i = \alpha \pm i\beta \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 1 \end{cases}. \end{aligned}$$

On note par y_h la solution de l'équation homogène associée à (2.).
Alors: $y_h(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x; (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$. **(1point).**
ÉASM On pose

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x \\ &= e^{\lambda x}[P_1(x)\cos(\theta x) + P_2(x)\sin(\theta x)] \\ &\text{Avec} \begin{cases} \lambda = 0 \\ \theta = 1 \\ P_1(x) = 1 \Rightarrow \deg(P_1(x)) = 0 \\ P_2(x) = 0 \Rightarrow \deg(P_2(x)) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

On note par y_p la solution particulière de l'équation donnée en (2.).
Donc y_p est sous la forme suivante :

$$y_p(x) = e^{\lambda x} x^m \left[Q_1(\theta x)\cos x + Q_2(\theta x)\sin x\right].$$

*) Puisque $\lambda + i\theta = i$ est une solution de l'(EC), alors $m = 1$.
*) Puisque $\max(\deg(P_1(x)), \deg(P_2(x))) = 0$ alors $\deg(Q_1(x)) = \deg(Q_2(x)) = 0$.
Ce qui fait que $y_p(x) = x\,[a\cos x + b\sin x]$ **(0.5 point)** où a et b sont des constantes à déterminer.
On a :

$$y_p'(x) = (a+bx)\cos x + (b-ax)\sin x.\ (\mathbf{0.25point}).$$

Et

$$y_p''(x) = (2b - ax)\cos x - (2a + bx)\sin x. \quad (\mathbf{0.25point}).$$

En remplaçant dans l'équation (2.), on trouve :

$$(2b - ax)\cos x - (2a + bx)\sin x + x\,[a\cos x + b\sin x] = \cos x$$

$$\Rightarrow 2b\cos x - 2a\sin x = \cos x$$

Par identification, on obtient: $\begin{cases} a = 0 \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$.**(0.25point).**

Ce qui fait que

$$y_p(x) = \frac{1}{2}x\sin x. \ (\mathbf{0.25point}).$$

Finalement,

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1\cos x + \left(C_2 + \frac{1}{2}x\right)\sin x; \ (C_1, C_2 \in \mathbb{R})\,.(\mathbf{0.5\ point}).$$

Exercice (15 points) Les questions suivantes sont complètement indépendantes.

1. En utilisant les développements limités, calculer la limite suivante:

$$L = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{2x}.$$

1ère méthode

On a

$$\frac{2x+1}{2x-1} = \frac{2x\mathbf{-1}+\mathbf{1}+1}{2x-1} = 1 + \frac{2}{2x-1}.$$

Donc,

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{2x} \\ &= e^{\ln\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{2x}} \\ &= e^{2x\ln\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)} \\ f(x) &= e^{2x\ln\left(1+\frac{2}{2x-1}\right)} \quad (\mathbf{1point}). \end{aligned}$$

Maintenant, on pose $\dfrac{2}{2x-1} = t$, on trouve $\lim\limits_{x\to+\infty} t = 0$ et $2x = \dfrac{2}{t} + 1$.$(\mathbf{1point})$.

Donc $\ln\left(1 + \dfrac{2}{2x-1}\right) = \ln(1+t)$ et $f(t) = e^{\left(\frac{2}{t}+1\right)\ln(1+t)}$.

Et comme $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ alors

$$\begin{aligned} f(t) &= e^{\left(\frac{2}{t}+1\right)\left(t-\frac{t^2}{2}+o(t^2)\right)} \quad (\mathbf{1point}). \\ &= e^{2-t+t-\frac{t^2}{2}+o(t^2)} \\ &= e^2.e^{-\frac{t^2}{2}+o(t^2)} \\ \Rightarrow\ & L = \lim_{t\to0}\left(e^2.e^{-\frac{t^2}{2}+o(t^2)}\right) = e^2. \quad (\mathbf{1point}). \end{aligned}$$

Remarque : On peut aussi procéder par changement de variables : $X = 2x+1$ par exemple !

$2^{\text{ème}}$ méthode

On a $\quad f(x) = e^{2x\ln\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)}$. D'autre part,

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right) &= \ln\left(\frac{2x\left(1+\frac{1}{2x}\right)}{2x\left(1-\frac{1}{2x}\right)}\right)\\ &= \ln\left(1+\frac{1}{2x}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{2x}\right). \quad (\mathbf{1point}).\end{aligned}$$

Et comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2x}\right) = 0$ alors,

$$\ln\left(1+\frac{1}{2x}\right) = \frac{1}{2x} - \frac{\left(\frac{1}{2x}\right)^2}{2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad \text{et} \quad \ln\left(1-\frac{1}{2x}\right) = \frac{-1}{2x} - \frac{\left(\frac{-1}{2x}\right)^2}{2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

$$\begin{aligned}\text{Ce qui fait que} \quad &: \quad \ln\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right) = \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right). \quad (\mathbf{1point}).\\ \text{Ainsi} \quad &: \quad 2x\ln\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right) = 2x\left(\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = 2 + o\left(\frac{1}{x}\right). \quad (\mathbf{1point}).\\ \text{On obtient} \quad &: \quad f(x) = e^{2+o\left(\frac{1}{x}\right)}.\\ \text{Et donc} \quad &: \quad L = \lim_{x\to+\infty} f(x) = e^2. \quad (\mathbf{1point}).\end{aligned}$$

2. Étudier **la dérivabilité** de la fonction suivante sur $\mathbb{R}$:

$$x \longmapsto f(x) = \begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0\\ 0 & \text{si } x = 0\end{cases}$$

a) Sur $\mathbb{R}^*$, la fonction donnée est composée par des opérations (produit, inverse, composition et puissance) qui préservent la dérivabilité des fonctions élémentaires (puissance, sin et inverse) dérivables sur $\mathbb{R}^*$. Elle est par conséquent dérivable sur $\mathbb{R}^*$. (**1point**).

b) Au point 0:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\left(x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0 \in \mathbb{R}.(\mathbf{1point})$$

Car la fonction $y \mapsto \sin y$ est bornée et $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$. Donc f est dérivable au point 0. (**0.5point**).

De a) et b), on conclut que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. (**0.5point**).

3. **Calculer** les intégrales suivantes :

a) $I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$

$1^{\text{ère}}$ méthode On pose $x = \sin y$, on trouve $dx = \cos y.dy$ (**1point**).

$x \in [0,1]$ et $x = \sin y \Rightarrow y = \arcsin x$. D'où $\begin{array}{l} x_1 = 0 \Rightarrow y_1 = \arcsin 0 = 0\\ x_2 = 1 \Rightarrow y_2 = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}\end{array}$ (**0.5point**).

Donc,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 y}\ \cos y\ dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos y| \cos y dy \end{aligned}$$

Mais comme $y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ alors $\cos y \geq 0$. Ce qui fait que :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 y\ dy \quad (\mathbf{0.5point}) \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(2y)+1)\ dy \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin(2y)+y\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ I &= \frac{\pi}{4}. \quad (\mathbf{0.5point}). \end{aligned}$$

2ème méthode

On procède par parties :

On pose $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = \sqrt{1-x^2} \end{cases}$, (**0.5point**)

On trouve $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \frac{1}{2}\dfrac{(-2x)}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \end{cases}$ (**0.5point**)

Donc

$$\begin{aligned} I &= \left[x\sqrt{1-x^2}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ &= -\int_0^1 \frac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ &= -\int_0^1 \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx (\mathbf{0.5point}) \\ I &= -I + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx (\mathbf{0.5point}) \\ &\Rightarrow\ 2I = [\arcsin(x)]_0^1 \\ &\Rightarrow\ I = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}\right] = \frac{\pi}{4} (\mathbf{0.5point}) \end{aligned}$$

b)

$$J = \int \frac{x-1}{x^2+2x+3}dx$$

On pose $P(x) = x^2+2x+3$. On remarque que : $\Delta = -8 < 0$.
Donc, sous la forme canonique, on a $\forall x \in \mathbb{R},\ \ P(x) = (x+1)^2 + 2$. (**0.25point**).
Et comme $P'(x) = 2x+2$, on a : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}(x-1) &= \frac{1}{2}(2x-2)\\ &= \frac{1}{2}(2x+2-2-2)\\ &= \frac{1}{2}[(2x+2)-4]\\ (x-1) &= \frac{1}{2}(2x+2)-2. \ (\mathbf{0.25point}).\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}J &= \int \frac{x-1}{x^2+2x+3}dx\\ &= \int \frac{\frac{1}{2}(2x+2)-2}{x^2+2x+3}dx\\ &= \frac{1}{2}\int \frac{(2x+2)}{x^2+2x+3}dx - 2\int \frac{dx}{(x+1)^2+2} \quad (\mathbf{1point}).\\ J &= \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+3\right| - 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{(x+1)}{\sqrt{2}}\right)+C, \quad (C\in\mathbb{R}).\ (\mathbf{1point}).\end{aligned}$$

4. Résoudre l'EDO **linéaire d'ordre 1** suivante :

$$\begin{aligned}xy'+2y &= x^2+1; \quad (x>0).\\ &\Rightarrow y'+\frac{2}{x}y = \frac{x^2+1}{x}; \quad (x>0).\end{aligned}$$

1$^{\text{ère}}$ méthode : variation de la constante
ÉSSM : (1pt)

$$\begin{aligned}y'+\frac{2}{x}y &= 0\\ &\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{2}{x}y\\ &\Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{2}{x}dx\\ &\Rightarrow \int\frac{dy}{y} = \int -\frac{2}{x}dx\\ &\Rightarrow \ln y = \ln(x)^{-2}+C, \quad (C\in\mathbb{R}).\end{aligned}$$

$$\Rightarrow y = \frac{K}{x^2}, \quad (K\in\mathbb{R}).$$

ÉASM : (1pt)

$$\begin{aligned}y &= \frac{K(x)}{x^2}\\ &\Rightarrow y' = \frac{K'(x)x^2-K(x)(2x)}{x^4}\\ &\Rightarrow y' = \frac{K'(x)}{x^2}-\frac{2K(x)}{x^3}.\end{aligned}$$

En remplaçant dans l'équation, on trouve:

$$\begin{aligned}
y' + \frac{2}{x}y &= \frac{x^2+1}{x} \\
&\Rightarrow \frac{K'(x)}{x^2} - \frac{2K(x)}{x^3} + \frac{2}{x}\left[\frac{K(x)}{x^2}\right] = \frac{x^2+1}{x} \\
&\Rightarrow \frac{K'(x)}{x^2} = \frac{x^2+1}{x} \\
&\Rightarrow K'(x) = x(x^2+1) \\
&\Rightarrow K(x) = \int \left(x^3 + x\right) dx \\
&\Rightarrow K(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}.
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
y(x) &= \frac{K}{x^2} + \frac{\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}}{x^2} \\
y(x) &= \frac{K}{x^2} + \frac{x^2}{4} + \frac{1}{2}. \quad (\mathbf{1pt})
\end{aligned}$$

$2^{\text{ème}}$ méthode : par le facteur intégrant
L'équation est écrite sous la forme: $\quad y' + a(x)y = b(x); \;\; (x > 0).$
Avec $a(x) = \dfrac{2}{x}$ et $b(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$.
Étape 1 : (**1pt**) On calcule le facteur intégrant :

$$\begin{aligned}
R(x) &= e^{-\int a(x)dx} \\
&= e^{-\int \frac{2}{x}dx} \\
&= e^{-2\ln x} \\
R(x) &= \frac{1}{x^2}.
\end{aligned}$$

Étape 2 : (**1pt**) On calcule :

$$\begin{aligned}
K(x) &= \int \frac{b(x)}{R(x)} dx \\
&= \int \left(x^2\right).\left(\frac{x^2+1}{x}\right) dx \\
&= \int \left(x^3 + x\right) dx \\
&= \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}.
\end{aligned}$$

Étape 3 : On écrit la solution sous la forme:

$$y(x) = R(x).\left[K(x) + C\right], \quad (C \in \mathbb{R}).$$

Ce qui donne :

$$y(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{1}{2} + \frac{C}{x^2}, \quad (C \in \mathbb{R}). \quad (\mathbf{1pt}).$$