Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen. $1^{ère}$ année LMD (2022/2023).
Faculté des Sciences. S2-MI, durée 1h:30′, le 10/05/2023.

Contrôle Continu de Remplacement -Analyse 2-

Question de cours (5 points)

1. **(3 points).** Soit les deux fonctions $x \longmapsto f(x) = \dfrac{1}{x+x^2}$ et $x \longmapsto g(x) = \dfrac{1}{x}$.

   Montrer que $f(x) \underset{0}{\backsim} g(x)$.

2. **(2 points)**. Pouvons-nous en déduire que $e^{f(x)} \underset{0}{\backsim} e^{g(x)}$? **Pourquoi**?

Exercice 1 (07,5 points)

1. **(1,5 points).** Soit $x \in \mathbb{R}$. **Trouver** les expressions suivantes en fonction de x:

$$a) \quad ch(\arg sh(x)) \quad b) \quad th(\arg sh(x)) \quad c) \quad sh(2\arg sh(x)).$$

2. **(3 points). Montrer que** $\forall x \in [-1,1]$, $\arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$.
3. **(3 points). Montrer que** $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \arg sh(\alpha) = \ln(\alpha + \sqrt{\alpha^2+1})$.

Exercice 2 (07,5 points)

1. **(2,5 points).** Utilisez la formule de **Taylor(Mc-Laurin)-Young** pour trouver le $\mathbf{DL}_2(0)$ de la fonction:

$$u \longmapsto g(u) = (1+u)^{\alpha}, (\alpha \in \mathbb{R}^*).$$

2. **(2,5 points).** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sqrt[3]{1+x+x^2+x^3}$.

   En utilisant la question précédente, **donner** le DL_2 de f au voisinage de 0.

3. **(2,5 points). Déterminer** l'équation de l'asymptote (Δ) à la courbe de f en $-\infty$, ainsi que **sa position** par rapport à cette courbe.

Bon courage.

On rappelle que :
1/ $\forall \alpha \in \mathbb{R}, sh(2\alpha) = 2sh(\alpha)ch(\alpha)$.
2/Quand n est impair, on a : $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\sqrt[n]{\alpha} = \alpha^{\frac{1}{n}}$.
3/ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$.
4/$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$.

Remarque: L'usage des téléphones portables est strictement interdit.

Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen. $1^{ère}$ année LMD (2022/2023).
Faculté des Sciences S2-MI, durée 1h:30$'$, le 10/05/2023.

Correction du Contrôle Continu -Analyse 2-

Question de cours (5 points)

1. **(3 points).** Soit les deux fonctions $x \longmapsto f(x) = \frac{1}{x+x^2}$ et $x \longmapsto g(x) = \frac{1}{x}$.
   Montrer que $f(x) \underset{0}{\backsim} g(x)$.

   - Il suffit de calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{1+x} = 1$. Donc $f(x) \underset{0}{\backsim} g(x)$.
   - Ou bien : $x + x^2 \underset{0}{\backsim} x \Rightarrow \dfrac{1}{x+x^2} \underset{0}{\backsim} \dfrac{1}{x}$. Donc $f(x) \underset{0}{\backsim} g(x)$.

2. **(2 points)**. Pouvons-nous en déduire que $e^{f(x)} \underset{0}{\backsim} e^{g(x)}$? **Pourquoi**?

   Non, $e^{f(x)} \underset{0}{\not\backsim} e^{g(x)}$ car:

   - $\lim\limits_{x\to 0} [f(x) - g(x)] = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-1}{1+x} = -1 \neq 0$.
   - Ou bien : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}} = \lim\limits_{x\to 0} e^{[f(x)-g(x)]} = e^{-1} \neq 1$.

Exercice 1 (07,5 points)

1. Simplifier les expressions suivantes:

$$a) \quad ch(\arg sh(x)).$$

On sait que :

$$\begin{aligned} \forall x &\in \mathbb{R}, ch^2(x) - sh^2(x) = 1 \\ &\Longrightarrow ch^2(x) = 1 + sh^2(x). \\ &\Longrightarrow |ch(x)| = \sqrt{1 + sh^2(x)} \end{aligned}$$

Et comme ch est une fonction à valeurs positives, on trouve:

$$\forall x \in \mathbb{R}, ch(x) = \sqrt{1 + sh^2(x)}.$$

Donc:

$$\forall x \in \mathbb{R}, ch(\arg sh(x)) = \sqrt{1 + sh^2(\arg sh\,(x))} = \sqrt{1 + x^2}.(\mathbf{0.5\ point}).$$

$$b) \quad th(\arg sh(x)).$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, th(\arg sh(x)) = \frac{sh(\arg sh(x))}{ch(\arg sh(x))} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.(\mathbf{0.5\ point}).$$

$$c) \quad sh(2 \arg sh(x)).$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, sh(2 \arg sh(x)) = 2sh(\arg sh(x))ch(\arg sh(x)) = 2x\sqrt{1+x^2}.(\mathbf{0.5\ point}).$$

2. **(3 points).** Montrer que $\forall x \in [-1,1]\,,\ \arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$.

   - **1ère méthode:** On pose :

$$\forall x \in [-1,1]\,,\ f(x) = \arccos x + \arcsin x.$$

f est définie, continue sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$ comme suit:

$$\forall x \in \left]-1,1\right[\,,\ f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0.(\mathbf{1\ point}).$$

Donc f est constante sur $]-1,1[$. i.e.:$\forall x \in \left]-1,1\right[\,,\ f(x) = k$.

Il suffit de remplacer par une valeur $x \in \left]-1,1\right[\,,\ x = 0$ par exemple.

$$\begin{aligned} f(0) &= k = \arccos(0) + \arcsin(0) \\ &= \frac{\pi}{2} + 0 \\ &\Rightarrow k = \frac{\pi}{2}.(\mathbf{1.25\ point}). \end{aligned}$$

Pour $x = 1$:

$$\begin{aligned} f(1) &= \arccos(1) + \arcsin(1) \\ &= 0 + \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\pi}{2}.(\mathbf{0.25\ point}). \end{aligned}$$

Pour $x = -1$:

$$\begin{aligned} f(-1) &= \arccos(-1) + \arcsin(-1) \\ &= \pi - \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\pi}{2}.(\mathbf{0.25\ point}). \end{aligned}$$

Au final:

$$\boxed{\forall x \in [-1,1]\,, f(x) = \tfrac{\pi}{2}}.(\mathbf{0.25\ point}).$$

- **2ème méthode** On a :

$$\begin{aligned} x &\in [-1,1] \Rightarrow \arccos x \in [0,\pi] .(\mathbf{0.5\ point}). \\ &\Rightarrow \frac{\pi}{2} - \arccos x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] .(\mathbf{0.5\ point}). \end{aligned}$$

Maintenant, on applique sin:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\arccos x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin(\arccos x).(\mathbf{1\ point}).$$

Car nous avons la relation trigonométrique :

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \sin\left(\alpha - \beta\right) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$$

Donc:

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right) &= 1.x - 0 \\ &= x \\ &\Rightarrow \frac{\pi}{2} - \arccos x = \arcsin x \end{aligned}$$

$$\boxed{\Rightarrow \tfrac{\pi}{2} = \arccos x + \arcsin x}.(\mathbf{1\ point}).$$

Remarque : Les étudiants peuvent aussi tirer $\arcsin x$ au départ et appliquer $\cos$.

3. **Montrer que** $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \arg sh(\alpha) = \ln(\alpha + \sqrt{\alpha^2+1})$.

   - **1ère méthode:**

   On pose $\arg sh(\alpha) = y$ **.** Alors

$$\begin{aligned} \alpha &= shy \Rightarrow \alpha = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \\ &\Rightarrow e^y - e^{-y} - 2\alpha = 0...(*). \end{aligned}$$

   On pose $e^y = z\ (>0)$, on trouve : $e^{-y} = \frac{1}{z}\,(>0)$.

   Donc

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow z - \frac{1}{z} - 2\alpha = 0 \\ &\Leftrightarrow z^2 - 2\alpha z - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow z_{1,2} = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2+1}(\mathbf{1point}). \end{aligned}$$

On veut montrer que, $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \begin{cases} z_1 = \alpha - \sqrt{\alpha^2+1} < 0...(1) \\ z_2 = \alpha + \sqrt{\alpha^2+1} > 0...(2) \end{cases}$,

Nous savons que :

$$\begin{aligned} \forall \alpha &\in \mathbb{R},\ \alpha^2 < \left(\alpha^2+1\right) \\ &\Rightarrow |\alpha| < \sqrt{\alpha^2+1} \\ &\Rightarrow -\sqrt{\alpha^2+1} < \alpha < \sqrt{\alpha^2+1}...(*)(\mathbf{0.5\ point}) \end{aligned}$$

- $(*) \Rightarrow \forall\alpha \in \mathbb{R},\ \alpha - \sqrt{\alpha^2+1} < 0.$ z_1 est donc refusé.**0.25 point**

- $(*) \Rightarrow \forall\alpha \in \mathbb{R},\ \alpha + \sqrt{\alpha^2+1} > 0.$ z_2 est donc accepté.**0.25 point**

La seule solution est : $z_2 = \alpha + \sqrt{\alpha^2+1} > 0.$
Ce qui fait que : $e^y = \alpha + \sqrt{\alpha^2+1} \Rightarrow y = \ln\left(\alpha + \sqrt{\alpha^2+1}\right).$
Ou alors, $\arg sh(\alpha) = \ln\left(\alpha + \sqrt{\alpha^2+1}\right)$.**(1point).**

- **2$^{\text{ème}}$ méthode**

On pose $\arg sh(\alpha) = y \Longrightarrow \alpha = shy$.
Nous savons que $\forall y \in \mathbb{R}, chy + shy = e^y$. Donc $y = \ln(chy + shy)$.**(1point).**
Mais comme $chy = \sqrt{sh^2y+1}$.**(1point).**
On obtient $y = \ln(shy + \sqrt{sh^2y+1})$. i.e. $\arg sh(\alpha) = \ln\left(\alpha + \sqrt{\alpha^2+1}\right)$. **(1point).**

Exercice 2 : (07,5 pts)

$$u \longmapsto g(u) = (1+u)^{\alpha}, (\alpha \in \mathbb{R}^*).$$

$$\begin{array}{lll} g(u) = (1+u)^{\alpha} & \Rightarrow g(0) = 1 & \\ g'(u) = \alpha(1+u)^{\alpha-1} & \Rightarrow g'(0) = \alpha & (\mathbf{1\ point}) \\ g''(u) = \alpha(\alpha-1)(1+u)^{\alpha-2} & \Rightarrow g''(0) = \alpha(\alpha-1) & \end{array}$$

Formule de Mc-Laurin-Young au voisinage de 0, à l'ordre 2:

$$\begin{aligned} g(u) &= g(0) + \frac{g'(0)}{1!}u + \frac{g''(0)}{2!}u^2 + o(u^2)(\mathbf{1\ point}) \\ O\grave{u}\ \lim_{u\to 0}\frac{o(u^2)}{u^2} &= 0. \end{aligned}$$

Ce qui donne:

$$(1+u)^{\alpha} = 1 + \alpha u + \frac{\alpha}{2}(\alpha-1)u^2 + o(u^2)(\mathbf{0.5\ point})$$

2.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt[3]{1+x+x^2+x^3}. \\ &\Rightarrow f(u) = (1+u)^{\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

Avec, comme changement de variables $x+x^2+x^3 = u$, (**0.5 point**) qui ne modifie pas le voisinage.(**0.5 point**) et $\alpha = \frac{1}{3}$.
Donc:

$$\begin{aligned} f(u) &= 1 + \frac{u}{3} - \frac{1}{9}u^2 + o(u^2).(\mathbf{0.5\ point}) \\ u &= x + x^2 + x^3 = \left(x + x^2\right) + o(x^2), \quad \text{et} \quad u^2 = x^2 + o(x^2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Alors } f(x) &= 1+\frac{1}{3}\left(x+x^2\right)-\frac{x^2}{9}+o(x^2).(\mathbf{0.5\ point}) \\ &= 1+\frac{1}{3}x+\frac{2}{9}x^2+o(x^2).(\mathbf{0.5\ point}) \end{aligned}$$

3. Au voisinage de $-\infty$

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{x} &= \frac{\sqrt[3]{1+x+x^2+x^3}}{x} \\ &= \frac{(1+x+x^2+x^3)^{\frac{1}{3}}}{\left[(x)^3\right]^{\frac{1}{3}}} \\ &= \left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1\right)^{\frac{1}{3}} (\mathbf{0.5\ point}) \end{aligned}$$

D'après ce qui précède, on trouve:

$$\frac{f(x)}{x} = 1+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{2}{9}\left(\frac{1}{x^2}\right)+o\left(\frac{1}{x^2}\right) (\mathbf{0.5\ point})$$

Et donc l'équation de l'asymptote à la courbe de f au voisinage de $-\infty$ est :

$$(\Delta) : y = x+\frac{1}{3}.(\mathbf{1\ point})$$

Et comme : $f(x)-(x+\frac{1}{3}) = \frac{2}{9}\left(\frac{1}{x^2}\right)+o\left(\frac{1}{x^2}\right) > 0$ au voisinage de $-\infty$, alors la courbe est au-dessus de l'asymptote.(**0.5 point**)