الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Université Abou Bekr Belkaid
Tlemcen Algérie
جامعة أبي بكر بلقايد
تلمسان الجزائر

Faculté des sciences – Dépts- Maths - Informatique.

Module : Algèbre 2 / Contrôle continu (remplacement).

1ère Année MI -L1 ING -L1 INFO 2022-2023. (Durée : 1H30 mn).

N.B. L'USAGE DE LA CALCULATRICE EST STRICTEMENT INTERDIT.

EXERCICE 01 : **(06 POINTS)**

On munit $E =]-1,1[\times \mathbb{R}^*$ de la loi $*$ définie par :

$$\forall (x, x'), (y, y') \in E, (x, x') * (y, y') = \left(\frac{x+y}{1+xy}, x'y'\right).$$

La loi $*$ est-elle interne dans E ? commutative ? associative ?

EXERCICE 02 : **(10 POINTS)**

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}$, les fractions rationnelles suivantes :

$$f(x) = \frac{x+2}{(x^2-1)^3(x^2+2)} \text{ et } g(x) = \frac{-x}{(x-1)^4}.$$

EXERCICE 03 : **(04 POINTS)**

On munit $E = \mathbb{R}_3[X]$ par la base $B = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ avec :

$P_1 = 1 - X, P_2 = 3X + 5X^2, P_3 = -X + X^2 + 6X^3 \; et \; P_4 = 5X^2 + 2X^3.$

Trouver les composantes de $Q = 2 - X + 3X^2 - 5X^3$ dans la base B.

BON COURAGE

Contrôle continu Algèbre 2 - MI -L1 INFO - L1 ING
2022-2023. Durée : 1H30mn. Le corrigé.

Exercice 01 : (6 points) On munit $E =]-1,1[\times \mathbb{R}^*$ de la loi $*$ définie par :

$$\forall (x,x'),(y,y') \in E, (x,x') * (y,y') = \left(\frac{x+y}{1+xy}, x'y'\right).$$

La loi $*$ est-elle interne? commutative ? associative ?

Solution :

1) $*$ est interne dans E si et seulement si :

$$\forall (x,x'),(y,y') \in E, (x,x') * (y,y') \in E.\textbf{(0.5 point)}$$

On a :

$$x'y' \in \mathbb{R}^* \text{ car } x', y' \in \mathbb{R}^*. \textbf{ (0.5 point)}$$

D'autre part :

Montrons que: $\forall x, y \in]-1,1[$:

$$-1 < \frac{x+y}{1+xy} < 1?$$

(a) Calculons :

$$\begin{aligned}\frac{x+y}{1+xy} - 1 &= \frac{x+y-1-xy}{1+xy} = \frac{(1-y)(x-1)}{1+xy} < 0 \text{ car: } y < 1 \text{ et } x < 1\\ &\Rightarrow \frac{x+y}{1+xy} < 1.\textbf{(0.75 point)}\end{aligned}$$

(b) de même :

$$\begin{aligned}\frac{x+y}{1+xy} + 1 &= \frac{x+y+1+xy}{1+xy} = \frac{(1+y)(1+x)}{1+xy} > 0 \text{ car: } y > -1 \text{ et } x > -1\\ &\Rightarrow \frac{x+y}{1+xy} > -1.\textbf{(0.75 point)}\end{aligned}$$

Conclusion : La loi $*$ est interne.

2) $*$ est commutative si et seulement si :

$$\forall (x,x'),(y,y') \in E, (x,x') * (y,y') = (y,y') * (x,x')?\textbf{(0.25 point)}$$

Soient $(x,y),(x',y') \in E$:

$$(x,x') * (y,y') = \left(\frac{x+y}{1+xy}, x'y'\right) ...(1).\textbf{(0.5 point)}$$

Et

$$(y,y') * (x,x') = \left(\frac{y+x}{1+yx}, xy\right) ...(2).\textbf{(0.5 point)}$$

$$(1) = (2) \Rightarrow * \text{ est commutative.}\textbf{(0.25 point)}$$

3) $*$ est associative si et seulement si :
$\forall (x,x'), (y,y'), (z,z') \in E,$

$$[(x,x') * (y,y')] * (z,z') = (x,x') * [(y,y') * (z,z')]?\textbf{(0.25 point)}$$

Soient $(x,y), (x',y'), (x'',y'') \in E$:

$$\begin{aligned}
[(x,x') * (y,y')] * (z,z') &= \left(\frac{x+y}{1+xy}, x'y'\right) * (z,z') \\
&= \left(\frac{\frac{x+y}{1+xy}+z}{1+\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)z}, x'y'z'\right) \\
&= \left(\frac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz}, x'y'z'\right) ...(1).\textbf{(0.75 point)}
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
(x,x') * [(y,y') * (z,z')] &= (x,x') * \left(\frac{y+z}{1+yz}, y'z'\right) \\
&= \left(\frac{x+\frac{y+z}{1+yz}}{1+x\frac{y+z}{1+yz}}, x'y'z'\right) \\
&= \left(\frac{x+xyz+y+z}{1+yz+xy+xz}, x'y'z'\right) ...(2).\textbf{(0.75 point)}
\end{aligned}$$

$$(1) = (2) \Rightarrow * \text{ est associative.}\textbf{(0.25 point)}$$

Exercice 02 : (10 points)

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}$ les fractions rationnelles suivante :

$$(1)\ f(x) = \frac{x+2}{(x^2-1)^3(x^2+2)}.$$

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x+2}{(x-1)^3(x+1)^3(x^2+2)} \quad \textbf{(0.25 point)} \\
&= \frac{a_1}{(x-1)} + \frac{a_2}{(x-1)^2} + \frac{a_3}{(x-1)^3} + \frac{b_1}{(x+1)} \\
&\quad + \frac{b_2}{(x+1)^2} + \frac{b_3}{(x+1)^3} + \frac{c_1x+c_2}{x^2+2}\textbf{(0.75 point)}
\end{aligned}$$

(3 points) Pour les a_i : On pose : $t = x - 1 \Rightarrow x = t + 1$

$$\begin{aligned}
\frac{x+2}{(x+1)^3(x^2+2)} &= \frac{3+t}{(t+2)^3(t^2+2t+3)} \\
&= \frac{3+t}{(t^3+6t^2+12t+8)(t^2+2t+3)} \\
&= \frac{3+t}{18t^2+24t^2+36t+8t^2+16t+24+...} \\
&= \frac{3+t}{24+52t+50t^2+...}
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll}
3+t & 24+52t+50t^2 \\
-\left(3+\frac{13}{2}t+\frac{25}{4}t^2\right) & \\
-\frac{11}{2}t-\frac{25}{4}t^2 & \underbrace{\frac{1}{8}}_{a_3}\underbrace{-\frac{11}{48}t}_{a_2}+\underbrace{\frac{17}{72}t^2}_{a_1} \\
-\left(-\frac{11}{2}t-\frac{143}{12}t^2\right) & \\
\frac{17}{3}t^2 &
\end{array}$$

(3 points) Pour les b_i : On pose : $t = x + 1 \Rightarrow x = t - 1$

$$\begin{aligned}
\frac{x+2}{(x-1)^3(x^2+2)} &= \frac{1+t}{(t-2)^3(t^2-2t+3)} \\
&= \frac{3+t}{(t^3-6t^2+12t-8)(t^2-2t+3)} \\
&= \frac{3+t}{-18t^2-24t^2+36t-8t^2+16t-24+...} \\
&= \frac{3+t}{-24+52t-50t^2+...}
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll}
1+t & -24+52t-50t^2 \\
 & \underbrace{\frac{-1}{24}}_{b_3}\underbrace{-\frac{19}{144}t}_{b_2}\underbrace{-\frac{172}{864}t^2}_{b_1} \\
-\left(1-\frac{13}{6}t+\frac{25}{12}t^2\right) & \\
\frac{19}{6}t-\frac{25}{12}t^2 & \\
-\left(\frac{19}{6}t-\frac{247}{36}t^2\right) & =\underbrace{\frac{-1}{24}}_{b_3}\underbrace{-\frac{19}{144}t}_{b_2}\underbrace{-\frac{43}{216}t^2}_{b_1} \\
\frac{172}{36}t^2 &
\end{array}$$

(2 points) Pour les c_i :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to i\sqrt{2}} c_1x+c_2 &= \lim_{x\to i\sqrt{2}} \frac{x+2}{(x^2-1)^3} \\
&\Rightarrow\ c_1 i\sqrt{2}+c_2 = \frac{i\sqrt{2}+2}{-27} \\
&\Rightarrow\ c_1 = \frac{-1}{27} \text{ et } c_2 = \frac{-2}{27}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2)\, g(x) &= \frac{-x}{(x-1)^4} = -\frac{x}{(x-1)^4} = -\frac{x-1+1}{(x-1)^4} \\
&= -\frac{1}{(x-1)^3} - \frac{1}{(x-1)^4}. \textbf{(1 point)}
\end{aligned}$$

Exercice 03 : (4 points)

On munit $E = \mathbb{R}_3[X]$ par la base $B = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ avec :
$P_1 = 1 - X, P_2 = 3X + 5X^2$, $P_3 = -X + X^2 + 6X^3$ et $P_4 = 5X^2 + 2X^3$.
Trouver les composantes de $Q = 2 - X + 3X^2 - 5X^3$ dans la base B.

Solution :

$$Q = 2 - X + 3X^2 - 5X^3 = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3 + \alpha_4 P_4 \textbf{(0.5 point)}$$

$$\begin{aligned} &= \alpha_1 (1 - X) + \alpha_2 \left(3X + 5X^2\right) + \alpha_3 \left(-X + X^2 + 6X^3\right) + \alpha_4 \left(5X^2 + 2X^3\right) \\ &= \alpha_1 + (-\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3) X + (5\alpha_2 + \alpha_3 + 5\alpha_4) X^2 + (6\alpha_3 + 2\alpha_4) X^3, \end{aligned}$$

ce qui implique que : **(0.5 point)**

$$\begin{cases} \alpha_1 = 2 \\ -\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 = -1 ...(2) \\ 5\alpha_2 + \alpha_3 + 5\alpha_4 = 3 ...(3) \\ 6\alpha_3 + 2\alpha_4 = -5 ...(4) \end{cases}$$

(2) donne :

$$\begin{aligned} 3\alpha_2 - \alpha_3 &= 1 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{1}{3} + \frac{\alpha_3}{3}. \\ (4) &\Rightarrow \alpha_4 = \frac{-5}{2} - 3\alpha_3, \end{aligned}$$

remplaçant dans (3) :

$$5\left(\frac{1}{3} + \frac{\alpha_3}{3}\right) + \alpha_3 + 5\left(\frac{-5}{2} - 3\alpha_3\right) = 3,$$

donc :

$$-\frac{37}{3}\alpha_3 - \frac{83}{6} = 0 \Rightarrow \alpha_3 = -\frac{\frac{83}{6}}{\frac{37}{3}} = -\frac{83}{6} \times \frac{3}{37} = -\frac{83}{74}.$$

$$\begin{aligned} \alpha_4 &= \frac{-5}{2} - 3\alpha_3 = \alpha_4 = \frac{-5}{2} + \frac{249}{74} = \frac{32}{37}. \\ \alpha_2 &= \frac{1}{3} + \frac{\alpha_3}{3} = \frac{1}{3} - \frac{\frac{83}{74}}{3} = \frac{1}{3} - \frac{83}{222} = -\frac{3}{74}. \end{aligned}$$

Donc les composantes de Q dans la base B sont :

$$Q = \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{3}{74} \\ -\frac{83}{74} \\ \frac{32}{37} \end{pmatrix}_B \textbf{.(3 points)}$$