Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen. $1^{ère}$ année LMD (2022/2023).
Faculté des Sciences. S2-MI, durée 1h:30', le 27/04/2023.

Contrôle Continu -Analyse 2-

Question de cours (5 points)

1. **(2.5 points).** Soit $a \in \mathbb{R}$. **Montrer que** si f est une fonction dérivable en a avec $f'(a) \neq 0$, alors :

$$f(x) - f(a) \underset{a}{\backsim} f'(a)(x-a)$$

2. **(2 points). En déduire** un équivalent de la fonction $x \to \sin x$ au voisinage de 0.
3. **(0.5 point).** Sachant que $(e^x - 1) \underset{0}{\backsim} x$, **trouver** la limite : $A = \lim_{x \to 0} \frac{(e^x-1)\sin^2 x}{(x^4 - x^3)}$.

Exercice 1 (08 points)

1. **(1 point). Trouver** $\arcsin(\sin(\frac{19\pi}{5}))$.
2. **(2 points). Résoudre** dans $[-1,1]$ l'équation : $\arccos(x) = \arcsin(x)$.
3. **(2 points). Montrer que** $\forall \alpha \geq 1,\ \arg ch(\alpha) = \ln(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1})$.
4. On définit sur $]0, +\infty[$ la fonction suivante :

$$x \mapsto f(x) = \arg ch\left[\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)\right]$$

   (a) **(1.5 points).** Montrer que f est **dérivable sur** $]0, +\infty[$ puis calculer sa **dérivée**.
   (b) **(1.5 points).** En utilisant la question 3, **simplifier** l'expression de f.

Exercice 2 (07 points)

1. **(2.25 points).** En utilisant la formule de **Taylor (Mc-Laurin) - Young,** trouver le $\mathbf{DL}_3(0)$ de la fonction:

$$x \to g(x) = \frac{1}{1+x}.$$

   (On peut utiliser les notations de Landau).

2. **(3 points).** En déduire le $\mathbf{DL}_3(0)$ de la fonction :

$$x \to f(x) = \frac{1}{1+e^x}.$$

3. **(1.75 points).** Déterminer l'équation de (Δ), **l'asymptôte au voisinage de** $(+\infty)$ au graphe (Γ) de la fonction :

$$x \to F(x) = \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}},$$

   ainsi que sa **position** par rapport à ce graphe.

Remarque: L'usage des téléphones portables est strictement interdit. Bon courage.

Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen. 1ère année LMD (2022/2023).
Faculté des Sciences **S2-MI**, durée 1h:30', le 27/04/2023.

Correction du Contrôle Continu -Analyse 2-

Question de cours (5 points)

1. Montrer que si f est une fonction dérivable en a avec $f'(a) \neq 0$ alors :

$$f(x) - f(a) \underset{a}{\backsim} f'(a)(x-a)$$

Puisque $f'(a) \neq 0$, il suffit de calculer $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{f'(a)(x-a)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{\left[\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)}\right]}{f'(a)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(a)}{f'(a)} = 1$. **(2.5 points)**

2. En déduire un équivalent de la fonction $x \to \sin x$ au voisinage de 0.

On pose $f(x) = \sin x$ et $a = 0$.
f est dérivable (sur $\mathbb{R}$, en particulier) en 0 et on a $f'(x) = \cos x$. S'en suit $f'(0) = 1 \neq 0$.
Et comme $f(0) = 0$, alors $\sin x \underset{0}{\backsim} x$ **(2 points).**

3. On a: $(e^x - 1) \underset{0}{\backsim} x$, $\sin^2 x \underset{0}{\backsim} x^2$ et $(x^4 - x^3) \underset{0}{\backsim} -x^3$, donc

$$\begin{aligned} A &= \lim_{x \to 0} \frac{(e^x-1)\sin^2 x}{(x^4 - x^3)} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{x.x^2}{-x^3} \\ A &= -1(\mathbf{0.5\ point}). \end{aligned}$$

Exercice 1 (08 points)

1. **Trouver** $\arcsin(\sin(\frac{19\pi}{5}))$.

$$\begin{aligned} \arcsin(\sin(\frac{19\pi}{5})) &= \arcsin(\sin(\frac{20\pi - \pi}{5})) \\ &= \arcsin(\sin(4\pi - \frac{\pi}{5})) \\ &= \arcsin(\sin(-\frac{\pi}{5})) \\ &= -\frac{\pi}{5} \text{ car } \frac{-\pi}{5} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].(\mathbf{1\ point}) \end{aligned}$$

2. Résoudre l'équation : $\arccos(x) = \arcsin(x)$.

On a : $\forall x\in[-1,1]$, $\arccos(x)\in[0,\pi]$ et $\arcsin(x)\in\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.**(0.25point).**
Donc, pour que $y=\arccos(x)=\arcsin(x)$ il faut que $y\in[0,\pi]\cap\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]=\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.**(0.25point).**
En même temps, $\arccos(x)=y\Rightarrow x=\cos y$, quand $y\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.
Et $\arcsin(x)=y\Rightarrow x=\sin y$, quand $y\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.
On aura donc,

$$\begin{aligned} 0 &\leq y\leq\frac{\pi}{2}\\ &\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\leq\cos y\leq\cos 0\quad(\text{car cos est décroissante})\\ &\Rightarrow 0\leq\cos y\leq 1\\ &\Rightarrow 0\leq x\leq 1(\mathbf{0.25point}).\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} 0 &\leq y\leq\frac{\pi}{2}\\ &\Rightarrow \sin 0\leq\sin y\leq\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\quad(\text{car sin est croissante})\\ &\Rightarrow 0\leq\sin y\leq 1\\ &\Rightarrow 0\leq x\leq 1(\mathbf{0.25point}).\end{aligned}$$

On cherche donc un $x\in[0,1]$ tel que : $\arccos(x)=\arcsin(x)$.

$$\begin{aligned} x &\in [0,1],\ \arccos(x)=\arcsin(x)\\ &\Rightarrow \cos(\arccos x)=\cos(\arcsin x)(\mathbf{0.5point}).\\ &\Rightarrow x=\sqrt{1-x^2}(\mathbf{0.25point}).\\ &\Rightarrow 2x^2=1\\ &\Rightarrow x=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ S &= \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}.(\mathbf{0.25point}).\end{aligned}$$

3. **Montrer que** $\forall\alpha\geq 1,\ \arg ch(\alpha)=\ln(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1})$.
   1ère méthode:
   On pose $\arg ch(\alpha)=y$ avec $y\geq 0$.**(0.25point).**
   Si $\arg ch(\alpha)=y$, alors $\alpha=chy\Rightarrow\alpha=\frac{e^y+e^{-y}}{2}\Rightarrow e^y+e^{-y}-2\alpha=0...(*)$.**(0.25point).**
   On pose $e^y=z\geq 1$ (car $y\geq 0$), on trouve : $e^{-y}=\frac{1}{z}\,(>0)$.
   Donc

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow z+\frac{1}{z}-2\alpha=0(\mathbf{0.25point}).\\ &\Leftrightarrow z^2-2\alpha z+1=0\\ &\Leftrightarrow z_{1,2}=\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-1}(\mathbf{0.25point}).\end{aligned}$$

   Remarque : la section suivante peut être exprimée par l'étudiant de plusieurs manières. Toutes les méthodes sont comptées juste pour vu qu'elles mènent à Rome !!!

- On montre que, $z_1 = \alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1} < 1$,**(0.25point).**

Supposons que :

$$\begin{aligned} \alpha - 1 - \sqrt{\alpha^2-1} &< 0 \\ &\Rightarrow \alpha - 1 < \sqrt{\alpha^2-1} \end{aligned}$$

Comme $\alpha \geq 1$ alors $\alpha - 1 \geq 0$, nous pouvons donc passer au carré. On trouve:

$$\begin{aligned} (\alpha-1)^2 &< \alpha^2 - 1 \\ -2(\alpha-1) &< 0 \text{ qui est vrai } \forall\alpha \geq 1. \end{aligned}$$

z_1 est donc refusé.

- On montre ensuite que, $z_2 = \alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1} \geq 1$,**(0.25point).**

Supposons le contraire, i.e. que :

$$\begin{aligned} \alpha - 1 + \sqrt{\alpha^2-1} &< 0 \\ &\Rightarrow \alpha - 1 < -\sqrt{\alpha^2-1} \end{aligned}$$

Ce qui est impossible, vu que $\alpha - 1 \geq 0$. Donc, $\forall\alpha \geq 1, \alpha + \sqrt{\alpha^2-1} \geq 1$
z_2 est donc accepté.
La seule solution est : $z_2 = \alpha + \sqrt{\alpha^2-1} \geq 1$.
Ce qui fait que : $e^y = \alpha + \sqrt{\alpha^2-1} \Rightarrow y = \ln\left(\alpha + \sqrt{\alpha^2-1}\right)$. Et donc,
$\arg ch(\alpha) = \ln\left(\alpha + \sqrt{\alpha^2-1}\right)$.**(0.5point).**
2ème méthode
On pose $\alpha = chy$ avec $y \geq 0, \alpha \geq 1$**(0.25point).**
Nous savons que $chy + shy = e^y$. **(0.5point).**
donc $y = \ln(chy + shy)$.**(0.25point).**
Or, $ch^2y - sh^2y = 1$ ce qui fait que $shy = \pm\sqrt{ch^2y-1}$.**(0.5point).**
sh étant croissante, $y \geq 0 \Rightarrow shy \geq 0$, ce qui fait que $shy = \sqrt{ch^2y-1}$.**(0.25point).**
On obtient alors $y = \ln(chy + \sqrt{ch^2y-1})$.
Et comme $y = \arg ch(\alpha)$, on obtient $\arg ch(\alpha) = \ln\left(\alpha + \sqrt{\alpha^2-1}\right).CQFD.$**(0.25point).**

4. On définit sur $]0, +\infty[$ la fonction suivante : $f(x) = \arg ch\left(\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)\right)$.
Remarque : Soit $x > 0$, On peut montrer facilement que $\left[\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)\right] \geq 1$.
En effet, supposons que c'est le cas, i.e. que $\left[\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)\right] \geq 1$, alors:

$$\frac{x^2+1}{x} \geq 2$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \frac{x^2+1-2x}{x} \geq 0 \\ &\Rightarrow \frac{(x-1)^2}{x} \geq 0 \text{ qui est toujours vraie quand } x > 0. \end{aligned}$$

1. (a) Montrer que f est **dérivable sur** $]0,+\infty[$ puis calculer sa **dérivée**.

f est formée par des opérations élémentaires (produit, inverse, somme et composée) qui préservent la dérivabilité des fonctions sur leurs domaines de définition. Elle est par conséquent dérivable sur $]0,+\infty[$. **(0.5 point).**

Rappelons que $(\arg ch(\theta(x)))' = \frac{\theta'(x)}{\sqrt{\theta^2-1}}$ donc,

$$\begin{array}{rcl} \forall x & \in &]0,+\infty[,\ f'(x) = \dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right).\dfrac{2x}{|x^2-1|} \\ \forall x & \in &]0,+\infty[,\ f'(x) = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{x}\ \ Si\ \ 0 < x \leq 1 \\ \frac{1}{x}\ \ Si\ \ x \geq 1 \end{array} \right. \quad (\mathbf{1\ point}). \end{array}$$

b. En utilisant la question 3, **simplifier** l'expression de f.

On sait de la question 3 que:

$$\forall y \geq 1,\ \arg ch(y) = \ln(y+\sqrt{y^2-1}).$$

Ainsi, en posant $\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right) = y$, on trouve:

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{y^2-1} & = & \sqrt{\dfrac{1}{4}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2 - 1} \\ & = & \sqrt{\dfrac{(x^2+1)^2}{4x^2} - 1} \\ & = & \sqrt{\dfrac{(x^2-1)^2}{4x^2}} \\ & = & \left|\dfrac{x^2-1}{2x}\right|.(\mathbf{0.5 point}). \end{array}$$

On obtient:

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & ln\left[\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{1}{x}\right) + \left|\dfrac{x^2-1}{2x}\right|\right] \\ & = & ln\left[\dfrac{x^2+1}{2x} + \left|\dfrac{x^2-1}{2x}\right|\right].(\mathbf{0.5 point}). \end{array}$$

Comme $x > 0$, il suffit donc de distinguer les cas $x \geq 1$ et $0 < x \leq 1$.

- Si $x \geq 1$, $f(x) = ln\left[\frac{x^2+1}{2x} + \frac{x^2-1}{2x}\right] = lnx$.
- Si $0 < x \leq 1$, $f(x) = \left[\frac{x^2+1}{2x} + \frac{1-x^2}{2x}\right] = ln\frac{1}{x} = -lnx$.

Puisque lnx est positif si $x \geq 1$ et négatif si $0 < x \leq 1$, nous pouvons rassembler les deux cas comme suit:

$$\forall x > 0, f(x) = |lnx|.(\mathbf{0.5 point}).$$

Exercice 2 : (07 pts)

1. Nous pouvons utiliser la formule de **Mc-Laurin-Young** pour trouver le $\mathbf{DL}_3(0)$ de la fonction

$$x \to g(x) = \frac{1}{1+x}$$

car elle est $C^\infty(\mathbb{R}\setminus\{-1\})$ (en particulier $C^3(\mathbb{R}\setminus\{-1\})$). Son **DL** étant unique, il coïncide avec la formule de Taylor (en l'occurrence Mc-Laurin) - Young.

Donc,

$$\left.\begin{array}{ll} g(x) = \dfrac{1}{1+x} & \Rightarrow g(0) = 1 \\ g^{'}(x) = \dfrac{-1}{(1+x)^2} & \Rightarrow g^{'}(0) = -1 \\ g^{''}(x) = \dfrac{2}{(1+x)^3} & \Rightarrow g^{''}(0) = 2 \\ g^{(3)}(x) = \dfrac{-6}{(1+x)^4} & \Rightarrow g^{(3)}(0) = -6 \end{array}\right. (\mathbf{1\ point})$$

Formule de Mc-Laurin-Young avec notation de Landau:

$$\begin{aligned} g(x) &= g(0) + \frac{g^{'}(0)}{1!}x + \frac{g^{''}(0)}{2!}x^2 + \frac{g^{(3)}(0)}{3!}x^3 + o(x^3)(\mathbf{1\ point}) \\ O\grave{u} \quad \lim_{x\to 0}\frac{o(x^3)}{x^3} &= 0. \end{aligned}$$

Ce qui donne:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)(\mathbf{0.25\ point})$$

2. En déduire le $\mathbf{DL}_3(0)$ de la fonction : $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$.

Comme le $\mathbf{DL}_3(0)$ de la fonction $x \to e^x$ est donné par :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)(\mathbf{0.5\ point})$$

On aura :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1+e^x} \\ &= \frac{1}{1+\left[1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right]} \\ &= \frac{1}{2+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)}(\mathbf{0.5\ point}) \end{aligned}$$

1ère méthode: Changement de variables:

$$f(x) = \frac{1}{2\left[1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o(x^3)\right]}$$

On pose $X = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o(x^3)$.(**0.25 point**). Le voisinage est inchangé puisque:

$$\lim_{x \to 0} X = 0 \quad (\mathbf{0.25\ point})$$

Donc : $f(X) = \frac{1}{2}\dfrac{1}{1+X} = \frac{1}{2}g(X)$.

$$f(X) = \frac{1}{2}\left[1 - X + X^2 - X^3 + o(X^3)\right]$$

Nous devons calculer X^2 et X^3 en suivant la règle de calcul des DLs : tronquer les ordres supérieurs à l'ordre demandé (en l'occurrence 3 ici).

$$\begin{aligned} X^2 &= \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o(x^3)\right)\left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o(x^3)\right) \\ &= \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{4} + o(x^3)(\mathbf{0.25\ point}) \end{aligned}$$

$$X^3 = \frac{x^3}{8} + o(x^3)(\mathbf{0.25\ point})$$

On remplace dans l'expression de f :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o(x^3)\right) + \left(\frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{4} + o(x^3)\right) - \left(\frac{x^3}{8} + o(x^3)\right) + o(x^3)\right] \\ &= \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^3}{48} + o(x^3). O\grave{u} \quad \lim_{x \to 0}\frac{o(x^3)}{x^3} = 0.(\mathbf{1\ point}) \end{aligned}$$

2ème méthode : Division euclidienne suivant les puissances croissantes:

$$\begin{array}{l|l} 1 & 2 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \\ \cline{2-2} 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{x^3}{12} & \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{48}x^3 + o(x^3) \\ \cline{1-1} -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2 - \frac{x^3}{12} & \\ \frac{-1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}x^3 & \\ \cline{1-1} \frac{1}{24}x^3 & \\ \frac{1}{24}x^3 & \end{array} \qquad (\mathbf{2\ points})$$

Donc, $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^3}{48} + o(x^3). O\grave{u} \quad \lim_{x \to 0}\frac{o(x^3)}{x^3} = 0.$

3. En utilisant ce qui précède, déterminer (Δ) l'asymptôte au voisinage de $+\infty$ au graphe (Γ) de la fonction $F(x) = \dfrac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$, ainsi que sa position par rapport à ce graphe.

   x est au voisinage de $+\infty$ maintenant.

Méthode 1 : On pose

$$t = \frac{1}{x}, \lim_{x \to +\infty} t = 0(\mathbf{0.25\ point})$$

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} \\
F(\frac{1}{t}) &= \frac{1}{t(1+e^{t})} \\
&= \frac{1}{t}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}t+\frac{1}{48}t^3+o(t^3)\right) \\
&= \frac{1}{2t}-\frac{1}{4}+\frac{1}{48}t^2+o(t^2)(\mathbf{0.25\ point})
\end{aligned}
$$

Donc :

$$F(x)=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{48x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right), O\grave{u} \quad \lim_{x\to 0} x^2 o(\frac{1}{x^2})=0.(\mathbf{0.25\ point})$$

Puisque:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[F(x)-\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{48x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]=0(\mathbf{0.25\ point})$$

Alors la droite (Δ) d'équation $y=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}$ est une asymptôte oblique au graphe (Γ) de F en $+\infty$.(**0.25 point**)
Et puisque $F(x)-\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{48x^2}>0$ au voisinage de $(+\infty)$(**0.25 point**), alors (Γ) est au-dessus de (Δ).(**0.25 point**)

Méthode 2 : (rappelons que x est au voisinage de $+\infty$ maintenant).

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} \\
&\Rightarrow \frac{F(x)}{x}=\frac{1}{(1+e^{\frac{1}{x}})}(\mathbf{0.25\ point}) \\
i.e. \frac{F(x)}{x} &= f\left(\frac{1}{x}\right) \\
x &\to +\infty \Rightarrow \frac{1}{x}\to 0.(\mathbf{0.25\ point})
\end{aligned}
$$

Donc, d'après ce qui précède :

$$\frac{F(x)}{x}=\frac{1}{2}-\frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{4}+\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^3}{48}+o\left(\left(\frac{1}{x}\right)^3\right).(\mathbf{0.5\ point})$$

Alors la droite (Δ) d'équation $y=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}$ est une asymptôte oblique au graphe (Γ) de F en $+\infty$.(**0.25 point**)
Et puisque $F(x)-\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{48x^2}>0$ au voisinage de $(+\infty)$(**0.25 point**), alors (Γ) est au-dessus de (Δ).(**0.25 point**)