Faculté des sciences – Dépts- Maths - Informatique.

Module : Algèbre 2 / Contrôle continu.

1ère Année MI -L1 ING -L1 INFO 2022-2023. (Durée : 1H30 mn).

N.B. L'USAGE DE LA CALCULATRICE EST STRICTEMENT INTERDIT.

EXERCICE 01 : (05 POINTS)

On munit $E = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ de la loi $*$ définie par :

$$\forall (x,y),(x',y') \in E, (x,y) * (x',y') = (xx', xy' + x'y).$$

Montrer que $(E,*)$ est un groupe commutatif.

EXERCICE 02 : (07 POINTS)

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}$, la fraction rationnelle suivante :

$$\frac{x^6 - 4x^5 + 10x^4 - 20x^3 + 25x^2 - 16x + 5}{(x-1)^4(x^2+4)}.$$

EXERCICE 03 : (08 POINTS)

(1) Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de E ?

$a)$ $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, 2x + y - 7z = 0\}$ avec $E = \mathbb{R}^3$.

$b)$ $G = \{P \in E / P'(0) = 0\}$, avec $E = \mathbb{R}_3[X]$(ensemble des polynômes de degré ≤ 3).

(2) Dans chaque cas vérifier si les vecteurs engendrent E ou non ?

a) $E = \mathbb{R}^3$: $V_1 = (1,2,3), V_2 = (3,-1,4)$ et $V_3 = (5,2,5)$.

b) $E = \mathbb{R}_3[X]$: $P_1 = 1 - X, P_2 = 3X + 5X^2, P_3 = -X + X^2 + 6X^3$ et $P_4 = 5X^2 + 2X^3$.

c) $E = \mathbb{R}_3[X]$: $P_1 = 7 - X, P_2 = X + 5X^2$ et $P_3 = -X + X^2 + 7X^3$

BON COURAGE

Contrôle continu Algèbre 2 - MI -L1 INFO - L1 ING
2022-2023. Durée : 1H30mn.
L'usage de la calculatrice est strictement interdit.

Exercice 01 : (5 points) On munit $E = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ de la loi $*$ définie par :

$$\forall (x, y), (x', y') \in E, (x, y) * (x', y') = (xx', xy' + x'y).$$

Vérifier si $(E, *)$ est un groupe commutatif ou non?

1) Vérifions que $*$ est interne dans E :

On a :

$$\begin{aligned} \forall (x, y), (x', y') &\in E, (x, y) * (x', y') = (xx', xy' + x'y) \in E(\textbf{0.5 point}) \\ \text{car } xx' &\neq 0. (\textbf{0.25 point }) \end{aligned}$$

(2) Vérifions que $*$ est commutative :

$$\begin{aligned} \forall (x, y), (x', y') &\in E, (x, y) * (x', y') = (xx', xy' + x'y) \\ &= (x'x, x'y + xy') = (x', y') * (x, y) (\textbf{0.5 point}) \end{aligned}$$

(3) Vérifions que $*$ est associative :

$$\begin{aligned} * \text{ est associative dans } E &\Leftrightarrow \forall (x, y), (x', y'), (x'', y'') \in E, [(x, y) * (x', y')] * (x'', y'') \\ &= (x, y) * [(x', y') * (x'', y'')] (\textbf{0.25 point}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall (x, y), (x', y'), (x'', y'') &\in E, [(x, y) * (x', y')] * (x'', y'') \\ &= (xx', xy' + x'y) * (x'', y'') \\ &= (xx'x'', xx'y'' + x''(xy' + x'y)) \\ &= (xx'x'', xx'y'' + x''xy' + x''x'y) ...(1)(\textbf{0.75 point}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall (x, y), (x', y'), (x'', y'') &\in E, (x, y) * [(x', y') * (x'', y'')] \\ &= (x, y) * (x'x'', x'y'' + x''y') \\ &= (xx'x'', x(x'y'' + x''y') + x'x''y) \\ &= (xx'x'', xx'y'' + x''xy' + x''x'y) ...(2)(\textbf{0.75 point}) \end{aligned}$$

$$(1) = (2) \Rightarrow * \text{ est associative dans } E.$$

(4) L'existence de l'élément neutre :

$$\begin{aligned} &(e_1, e_2) \text{ est un élément neutre pour } * \text{ dans } E \\ \Leftrightarrow\ &\forall (x, y) \in E, (x, y) * (e_1, e_2) = (x, y) \text{ car } * \text{ est commutative.}(\textbf{0.25 point}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x, y) * (e_1, e_2) &= (x, y) \Leftrightarrow (xe_1, xe_2 + e_1 y) \\ &\Rightarrow (e_1, e_2) = (1, 0) \in E(\textbf{0.75 point}) \end{aligned}$$

(5) L'existence de l'élément symétrique pour chaque élément de E :

(x', y') est l'élément symétrique de (x, y) signifie :

$$\begin{aligned}
(x,y)*(x',y') &= (e_1,e_2)=(1,0)\,(\mathbf{0.25\ point})\\
&\Rightarrow (xx', xy'+x'y)=(1,0)\\
&\Rightarrow x'=\frac{1}{x} \text{ et } y'=-\frac{x'y}{x}=-\frac{y}{x^2}\\
&\Rightarrow (x',y')=\left(\frac{1}{x},-\frac{y}{x^2}\right)\in E \text{ et existe car } x\neq 0.(\mathbf{0.75\ point})
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$(E,*) \text{ est un groupe commutatif.}$$

Exercice 02 : (7 points)

Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle suivante :

$$f(x)=\frac{x^6-4x^5+10x^4-20x^3+25x^2-16x+5}{(x-1)^4(x^2+4)}.$$

On a :

$$(x-1)^4\left(x^2+4\right)=x^6-4x^5+10x^4-20x^3+25x^2-16x+4.(\mathbf{0.75\ point})$$

Alors :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x^6-4x^5+10x^4-20x^3+25x^2-16x+4+1}{(x-1)^4(x^2+4)}\\
&= 1+\frac{1}{(x-1)^4(x^2+4)}(\mathbf{0.5\ point}),
\end{aligned}$$

de plus :

$$\frac{1}{(x-1)^4(x^2+4)}=\frac{\alpha_1}{(x-1)}+\frac{\alpha_2}{(x-1)^2}+\frac{\alpha_3}{(x-1)^3}+\frac{\alpha_4}{(x-1)^4}+\frac{\alpha_5x+\alpha_6}{x^2+4}.(\mathbf{0.5\ point})$$

On pose : $y=x-1\Rightarrow x=y+1$, donc on trouve :

$$\frac{1}{\left[(y+1)^2+4\right]}=\frac{1}{5+2y+y^2}$$

$$\begin{array}{c|l}
1 & 5+2y+y^2\\
\hline
-\left(1+\frac{2}{5}y+\frac{1}{5}y^2\right) & \\
-\frac{2}{5}y+\frac{1}{5}y^2 & \\
-\left(-\frac{2}{5}y-\frac{4}{25}y^2-\frac{2}{25}y^3\right) & \frac{1}{5}-\frac{2}{25}y+\frac{9}{125}y^2-\frac{8}{625}y^3\\
\frac{9}{25}y^2+\frac{2}{25}y^3 & \\
-\left(\frac{9}{25}y^2+\frac{18}{125}y^3\right) & \\
-\frac{8}{125}y^3 & \\
 & \\
 & \\
\end{array}$$

ce qui omplique que :

$$\alpha_1 = -\frac{8}{625}, \alpha_2 = \frac{9}{125}, \alpha_3 = -\frac{2}{25}, \alpha_4 = \frac{1}{5}.(0.75 \text{ point} \times 4)$$

De plus :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2i} \alpha_5 x + \alpha_6 &= \lim_{x\to 2i} \frac{1}{(x-1)^4}(\textbf{0.5 point}) \\
&\Rightarrow 2i\alpha_5 + \alpha_6 = \frac{1}{(2i)^4 - 4(2i)^3 + 6(2i)^2 - 4(2i) + 1} \\
&\Rightarrow 2i\alpha_5 + \alpha_6 = \frac{1}{16 + 32i - 24 - 8i + 1} = \frac{1}{-7+24i} = -\frac{7}{625} - \frac{24}{625}i. \\
&\Rightarrow \alpha_5 = -\frac{12}{625} \text{ et } \alpha_6 = -\frac{7}{625}.(\textbf{0.5 point} \times 2)
\end{aligned}$$

Exercice 03 : (8 points)

(1) (1) Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels?

a) $E_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 2x + y - 4z = 0\right\}$.

$$\begin{aligned}
E_1 &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / y = -2x + 4z\right\} \\
&= \left\{(x, -2x+4z, z), x, z \in \mathbb{R}\right\}.
\end{aligned}$$

a1) **(0.5 point)** $(0,0,0) = (0, -2\times 0 + 4\times 0, 0) \in E_1 \Rightarrow E_1 \neq \emptyset$.

a2) **(0.5 point)** $\forall V_1 = (x_1, -2x_1 + 4z_1, z_1), V_2 = (x_2, -2x_2 + 4z_2, z_2) \in E_1$

$$V_1 + V_2 = \left(\underbrace{x_1 + x_2}_{X}, -2\left(\underbrace{x_1 + x_2}_{X}\right) + 4\left(\underbrace{z_1 + z_2}_{Z}\right), \underbrace{z_1 + z_2}_{Z}\right) \in E_1.$$

a3) **(0.5 point)** $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall V = (x, -2x + 4z, z) \in E_1$:

$$\alpha V = \left(\underbrace{\alpha x}_{X}, -2\underbrace{\alpha x}_{X} + 4\underbrace{\alpha z}_{Z}, \underbrace{\alpha z}_{Z}\right) \in E_1$$

Conclusion : E_1 est un sous-espace vectoriel de E_1.

b) $E_2 = \{P \in \mathbb{R}_3[X]$ (ensemble des polynômes de degré $\leq 3/\ P'(0) = 0\}$.

b1) **(0.5 point)** Pour le polynôme nul $P_0(X) = 0, \forall X \in \mathbb{R}$, on a :

$$P_0'(0) = 0 \Rightarrow P_0 \in E_2 \Rightarrow E_2 \neq \emptyset.$$

b2) **(0.5 point)** Soient P_1 et $P_2 \in E_2$ alors :

$$(P_1 + P_2)'(0) = P_1'(0) + P_2'(0) = 0 \Rightarrow P_1 + P_2 \in E_2.$$

b3) **(0.5 point)** Soient $P \in E_2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ alors:

$$(\alpha P)'(0) = \alpha\left[(P)'(0)\right] = 0 \Rightarrow \alpha P \in E_2.$$

Conclusion :

$$E_2 \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}_3[X].$$

(3) Dans chaque cas vérifier si les vecteurs engendrent E ou non?

a) (2 points) Dans $E = \mathbb{R}^3 : V_1 = (1,2,3), V_2 = (3,-1,4)$ et $V_3 = (5,2,5)$.
Puisque :

$$\dim E = 3 = card\{V_1, V_2, V_3\},$$

alors si les vecteurs sont libres donc c'est une base, ce qui implique que $\{V_1, V_2, V_3\}$ engendre E. En effet :

$$\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \alpha_3 V_3 = (0,0,0)$$

$$\Rightarrow \quad (\alpha_1 + 3\alpha_2 + 5\alpha_3, 2\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3, 3\alpha_1 + 4\alpha_2 + 5\alpha_3) = (0,0,0)$$
$$\Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{c} \alpha_1 + 3\alpha_2 + 5\alpha_3 = 0...(1) \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0...(2) \\ 3\alpha_1 + 4\alpha_2 + 5\alpha_3 = 0...(3) \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{rcl} (3)-(1) & \Rightarrow & 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0...(4) \\ 2\times(3) - 5\times(2) & \Rightarrow & -4\alpha_1 + 13\alpha_2 = 0...(5) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 2\times(4)+(5) & \Rightarrow & 15\alpha_2 = 0 \\ & \Rightarrow & \alpha_2 = 0, \alpha_1 = 0 \text{ et } \alpha_3 = 0, \end{array}$$

ce qui implique que les vecteurs sont libres donc engendrent $\mathbb{R}^3$.

b) (2 points) Dans $E = \mathbb{R}_3[X] : P_1 = 7, P_2 = 2 + X, P_3 = X - 8X^2 + 5X^3$ et $P_4 = 2X^2 + 3X^3$.

$$\dim \mathbb{R}_3[X] = 4 = card\{P_1, P_2, P_3, P_4\},$$

donc il suffit de vérifier si elle est libre, ce qui permet de dire que les vecteurs forment une base donc engendrent $\mathbb{R}_3[X]$. En effet :

$$\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3 + \alpha_4 P_4 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_1(7) + \alpha_2(2+X) + \alpha_3\left(X - 8X^2 + 5X^3\right) + \alpha_4\left(2X^2 + 3X^3\right) = 0$$
$$\Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{c} 3\alpha_4 + 5\alpha_3 = 0...(1) \\ 2\alpha_4 - 8\alpha_3 = 0...(2) \\ \alpha_3 + \alpha_2 = 0...(3) \\ 7\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0...(4) \end{array}\right.$$
$$2\times(1) - 3\times(2) \quad \Rightarrow \quad 34\alpha_3 = 0 \Rightarrow \alpha_3 = 0 \Rightarrow \alpha_4 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0,$$

ce qui implique que les vecteurs sont libres donc engendrent $\mathbb{R}_3[X]$.

c) (1 point) Dans $E = \mathbb{R}_3[X] : P_1 = 7, P_2 = 8 + X,\ P_3 = X - 3X^2 + 5X^3$.

Puisque :

$$card\,\{P_1, P_2, P_3\} = 3 < \dim \mathbb{R}_3[X] = 4,$$

alors les vecteurs ne engendrent pas $\mathbb{R}_3[X]$.

Bon courage.