ANALYSE I, TD 4

Fonctions réelles d'une variable réel: Limite et Continuité

Exercice 1. Déterminer si les expressions suivantes sont des fonctions ou pas

- f_1 est définie par $f_1(x)^2 + \cos(x) = 0$.
- f_2 est définie par $f_2(x)^3 + e^{2x+1} = 0$.

Exercice 2. Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes

$$\frac{x+1}{x^4 - x^2 + 1}, \quad \cos\left(\frac{1}{1-e^{x^2}}\right), \quad \frac{\sin(x)}{\cos(2x)}, \quad \sqrt{1 - 2\sin(2x)},$$
$$\frac{1}{e^{2x} + e^x - 1}, \quad \sqrt{\cos(x)^2 + \cos(x) + 1}, \quad \ln(1 - \sin(x)).$$

Exercice 3. On utilisant la définition de la limite, montrer que

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} x\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0, \quad \lim_{x\to 2} \frac{1}{(x-2)^2} = +\infty, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{E}(x)}{x} = 0.$$

Exercice 4. Soit f et g deux fonctions définies sur $v =]x_0 - a; x_0 + a[$ tel que $a > 0$, f bornée sur v et $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$. Montrer que

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0.$$

Exercice 5. Soit f et g deux fonctions réelles d'une variable réel, on note par $\mathscr{D}_f$ (respectivement $\mathscr{D}_g$) le domaine de définition de la fonction f (respectivement de g). On suppose qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$ et $]a; b[\subset \mathscr{D}_f \cap \mathscr{D}_g$. Soit $x_0 \in]a; b[$ et $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1, \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = l_2.$$

Montrer que

$$\lim_{x\to x_0} f(x) + g(x) = l_1 + l2, \quad \lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = l_1 l2.$$

Exercice 6. Calculer la limite des fonction suivante

$$\lim_{x\to 3} \frac{1}{2x-6}, \quad \lim_{x\to 0} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)(x-3), \quad \lim_{x\to 3} \frac{1-4x}{x-3}, \quad \lim_{x\to 3} \frac{x^3}{4-2x}, \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x} + 2 - 3x}{x},$$
$$\lim_{x\to -\infty} \frac{2x+5}{\sqrt{-x}}, \quad \lim_{x\to +\infty} \mathrm{E}\left(\frac{1}{x}\right)\ln(x), \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{\mathrm{E}(x)}{\mathrm{E}(2x)}, \quad \lim_{x\to +\infty} \sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}, \quad \lim_{x\to 0} \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1} - \frac{1}{x}$$
$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(e^x + \ln(x)\right), \quad \lim_{x\to +\infty} e^{2x} - e^x, \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{xe^x + 2e^x - 5}{e^x - 3}, \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2 + x\sin(x)}{x^2 + x\cos(x)}.$$

M. Houbad, m.houbad@gmail.com, Tlemcen le 22 Janvier 2023
Université Abou Bekr Belkaid, 13000, Tlemcen, Algérie, www.univ-tlemcen.dz

Exercice 7. Étudier la continuité des fonction suivante

$$f(x) = \begin{cases} x\mathrm{E}\left(\dfrac{1}{x}\right) & si \quad x \neq 0, \\ 1 & si \quad x = 0. \end{cases}, \qquad g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} & si \quad x \geq 1, \\ 4\dfrac{\sin(x-1)}{x-1} & si \quad x < 1. \end{cases}$$

Exercice 8. Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \mathrm{E(x)} + \sqrt{x - \mathrm{E(x)}}$$

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f.
2. Étudier la monotonie de la fonction f.
3. Étudier la continuité de f en $x_0 \in \mathbb{Z}$.
4. Étudier la continuité de f en $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.
5. Calculer la limite de f lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 9. Étudier le prolongement par continuité sur $\mathbb{R}$ des fonction suivante

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}, \quad g(x) = \frac{x(x-1)}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}}, \quad h(x) = \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}-x}$$

$$k(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(x)}{x-1} & si \quad x > 1, \\ \dfrac{\sin(x-1)}{x-1} & si \quad x < 1. \end{cases}, \quad l(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos(x)-1}{x} & si \quad x > 0, \\ \dfrac{e^x-1}{x} & si \quad x < 0. \end{cases}$$

Exercice 10. Soit f une fonction continue définie sur $\mathbb{R}$ tel que

$$\underset{x\to-\infty}{\mathrm{Lim}} f(x) = l_1 \in \mathbb{R}, \qquad \underset{x\to+\infty}{\mathrm{Lim}} f(x) = l_2 \in \mathbb{R}.$$

Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11. Montrer que tout polynôme réel à coefficient réel de degré impaire admet une racine dans $\mathbb{R}$.

Exercice 12. Soit f une fonction bornée continue définie sur $[a;b]$ à valeur dans $[a;b]$. Monter que si il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que la fonction

$$g = f^n = \bigcirc_{k=1}^{n} f = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{\text{n − fois}}$$

est contractante, alors f admet un unique point fixe.