ANALYSE I, TD 3

Les Suites Numériques

Exercice 1. On utilisant la définition de la limite d'une suite numérique, montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0, \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n+2} = 1, \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n^2+1} = 0.$$

Exercice 2. Étudier la convergence et calculer la limite des suites numériques suivantes

$$1+\frac{1}{2^n}, \quad \frac{1}{n}+\left(\frac{1}{3}\right)^n, \quad 5^n-4^n, \quad \frac{3^n+2}{8^n-1}.$$

$$\frac{2^n}{n!}, \quad \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n, \quad \frac{n!}{n^n}, \quad \sqrt{n+1}-\sqrt{n}, \quad \frac{[\sqrt{n}]}{n}.$$

Exercice 3. Calculer les sommes suivantes

$$\sum_{k=1}^{n} k, \quad \sum_{k=1}^{n} k^2, \quad \sum_{k=1}^{n} k^3, \quad \sum_{k=1}^{n} k^4.$$

Calculer la limite des suites numériques suivantes

$$u_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k, \quad v_n = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2, \quad w_n = \frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n} k^3, \quad z_n = \frac{1}{n^5}\sum_{k=1}^{n} k^4.$$

Exercice 4. Soit la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par l'expression

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad u_n = n\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{n^2+k},$$

- Établir l'encadrement suivant

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad n\frac{2n+1}{(n+1)^2} \leq u_n \leq n\frac{2n+1}{n^2+1}.$$

- Déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 5. Soit la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par l'expression

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \quad v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n+k}}\right),$$

- Établir l'encadrement suivant

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \quad \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \leq u_n \leq \cos\left(\frac{1}{\sqrt{2n-1}}\right).$$

- Déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 6. Soient $a, b \in \mathbb{R}$, on définit la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$u_{n+1} = au_n + b.$$

Déterminer $l \in \mathbb{R}$ de telle sorte que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = u_n - l$ soit une suite géométrique, et discuter selon les valeurs de a, b la convergence de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 7. Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ en fonction de n dans les deux cas suivants

- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \quad u_{n+1} = \frac{1}{n}u_n, \quad u_1 \in \mathbb{R}^*.$$

- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \quad u_{n+2} = \frac{n+1}{n^2}u_n, \quad u_1 \in \mathbb{R}^*.$$

Exercice 8. Soit la suite $(u_n)_n$ définie par

$$u_0 = 6, \quad \forall n \in \mathbb{N} : \quad u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2.$$

- Déterminer $v_n = u_n - 3$ en fonction de n.
- Déterminer u_n en fonction de n.
- Calculer la limite de u_n lorsque n tend vers l'infinie.

Exercice 9. Soit la suite numérique définie par

$$u_0 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N} : \quad u_{n+1} = 2u_n + 1 - n.$$

Montrer par récurrence que $u_n \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et déduire que la suite $(u_n)_n$ diverge.

Exercice 10. Soit $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites numériques définies par

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{u_n^2 + 12}, \quad v_n = u_n^2 - \alpha$$

- Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que $(v_n)_n$ soit une suite géométrique.
- On considère la valeur de α obtenu au niveau de la question précédente, calculer la limite de $(u_n)_n$.

Exercice 11. Soit la suite numérique $(u_n)_n$ définie par

$$u_0 = \frac{3}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N} : \quad u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2$$

- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \in [1; 2]$.
- Montrer que $(u_n)_n$ est une suite décroissante.
- Montrer que $(u_n)_n$ est une suite convergente et calculer sa limite.