Université Abou Bekr Belkaid
Faculté des sciences, Département de Mathématiques
13000, Tlemcen, Algérie, www.univ-tlemcen.dz

L1. Tc. Maths. Inform., année universitaire 2022 − 2023
Resp. Module: M. Houbad, m.houbad@gmail.com

ANALYSE I, TD. 2

Les Nombres Complexes

Exercice 1. Écrire la forme trigonométrique et exponentielle des nombres complexes suivants

$$z_1 = -1 + i\sqrt{3}, \quad z_2 = \sqrt{3} - i, \quad z_3 = 1 + i, \quad z_4 = 1 - i$$
$$z_5 = -3, \quad z_6 = -3\sqrt{3} + 3i, \quad z_7 = -2i, \quad z_8 = e^{ie^{i}}.$$

Exercice 2. Déterminer l'ensemble des points $M(x, y)$ vérifiant

$$|z - i + 1| = 4, \quad z = x + iy.$$

Exercice 3. Déterminer $n \in \mathbb{N}$ pour que $(\sqrt{3} - i)^n$ soit un nombre imaginaire pure.
Exercice 4. Soient A un point d'affixe $z = (1 + i)/2$, M un point d'affixe z^n et O le point d'affixe zéro. Déterminer n pour que les points O, A et M soient alignés.
Exercice 5. Déterminer les solutions des équations suivantes

$$z^4 = 1, \quad z^4 = 1 + i, \quad z^2 + z + 1 = 0, \quad z^2 - z^2 + 1 = 0, \quad z^4 + z^3 + 2z^2 + z + 1 = 0.$$

Exercice 6. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$\left(\frac{z + i}{z - i}\right)^2 = -2 + 2i\sqrt{3}.$$

Exercice 7. Écrire les expressions suivantes comme une somme des $\alpha\cos(ax)$ et $\beta\sin(bx)$.

$$(\cos(x))^3, \quad \sin(2x)\cos(x)^2, \quad \sin(x)\cos(x)\sin(2x), \quad (\sin(x))^4, \quad (\cos(x))^{2p}, \quad p \in \mathbb{N}.$$

Exercice 8. Soit $c \in \mathbb{C}$ tel que $|c| < 1$.

- Montrer que
$$|z + c| \leq |1 + \bar{c}z| \iff |z| \leq 1.$$
- Soit $\mathcal{D}$ le disque de centre zéro et de rayon un et $\mathcal{C}$ le cercle du centre zéro et de rayon un. On définit l'application f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ par
$$f(z) = \frac{z + c}{1 + \bar{c}z}.$$
Montrer que f est une application de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}$ satisfait $f(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}$.

Exercice 9. Pour chaque $z \in \mathbb{C}$ avec $z \neq -1$ on associé $z' \in \mathbb{C}$ définit par

$$z' = \frac{-iz - 2}{z + 1}.$$

- Donner z' sous la forme algébrique.
- Déterminer z sous forme algébrique lorsque $z' = 1/2$.
- Montrer que pour tout $z \neq -1$ on a
$$|z + 1|\,|z' + i| = \sqrt{5}.$$

- Dans le cas où z appartient à un cercle de centre zéro et de rayon deux, montrer que z' appartient à un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 10. On note par j le nombre complexe de module un et d'argument $2\pi/3$

- Donner l'écriture exponentielle et algébrique de j.
- Montrer que $j^3 = 1$, $1 + j + j^2 = 0$ et $e^{i\pi/3} = -j^2 = -\overline{j}$.
- représenter 1, j et j^2 dans le plan complexe.