Université Abou Bekr Belkaid
Faculté des sciences, Département de Mathématiques
13000, Tlemcen, Algérie, www.univ-tlemcen.dz

Resp. Module: M. Houbad, m.houbad@gmail.com

ANALYSE I, TD 1

Les Nombres Réels

Exercice 1.

- Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer que
$$\forall \varepsilon > 0 : \quad |x| \leq \varepsilon \Longrightarrow x = 0.$$
- Montrer que $|x + y| = |x| + |y|$ si et seulement si x, y sont de même signe.
- Montrer que $|x - y| = |x - z| + |z - y|$ si et seulement si $x \leq z \leq y$ ou $y \leq z \leq x$.

Exercice 2.

- Soit $n \in \mathbb{N}$ premier supérieur ou égale 2. Montrer que $\sqrt[2]{n}$ est un nombre irrationnel.
- Montrer que $\sqrt[2]{2} + \sqrt[2]{3}$ et $\sqrt[3]{5} - \sqrt[2]{3}$ ne sont pas des rationnels.
- Soient $x \in \mathbb{R}$, $(a, b, c, d) \in \mathbb{Q}^4$ tels que $x \notin \mathbb{Q}$ et $ad - bc \neq 0$. Montrer que
$$\frac{ax + b}{cx + d} \notin \mathbb{Q}.$$

Exercice 3.

- Montrer que si a est un nombre premier alors $\sqrt{a} \notin \mathbb{Q}$.
- Soient $a, a' \in \mathbb{Q}$ et b, b' deux nombre premier. Montrer que si $a + \sqrt{b} = a' + \sqrt{b'}$ alors $a = a'$ et $b = b'$.

Exercice 4. Soit $n, p \in \mathbb{N}$ tel que $n > p$ et $r \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Montrer que
$$\sum_{k=p}^{n} r^k = r^p \frac{1 - r^{n-p+1}}{1 - r}$$

Exercice 5. Pour $k, n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$ on défini C_n^k et $\sqrt[n]{x}$ par
$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \qquad \sqrt[n]{x} = x^{1/n}.$$

- Montrer la formule du binôme de Newton exprimée par
$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\} : \quad (a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, a^k b^{n-k}.$$
- Montrer que
$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\} : \quad \sqrt[n]{x + y} \leq \sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{y}.$$

Exercice 6. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \qquad \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}.$$

Déduire la valeur de la partie entière de

$$y_k = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{10^{2k}} \frac{1}{\sqrt{j}}.$$

Exercice 7. Soit $x \in]1; +\infty[$, monter que

$$\left(\frac{[x]}{x}\right)^2 \leq \frac{[x]}{x}, \quad \left(\frac{[x]}{x-1}\right)^2 > \frac{[x]}{x-1}.$$

Exercice 8. Déterminer la borne supérieur, la borne inférieure, le maximum et le minimum des l'ensembles suivantes :

$$\mathcal{A} = \left\{ -1 + \frac{(-1)^n}{n+1}\ , \quad n \in \mathbb{N} \right\}, \quad \mathcal{B} = \left\{ \frac{2n + (-1)^n}{n+1}\ , \quad n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Exercice 9.

- Montrer que tout sous ensemble d'un ensemble majoré (respectivement minoré) est majoré (respectivement minoré).
- Montrer que l'union d'une famille finie de sous ensembles majorés (respectivement minorés) est majorée (respectivement minorée).
- Donner un exemple d'une famille infinie de sous ensembles majorés (respectivement minorés) tel que leurs union n'est pas majoré (respectivement n'est pas minoré).
- Montrer que l'intersection d'une famille quelconque de sous ensembles bornés est bornée.

Exercice 10. Soient A et B deux sous ensembles non vides majoré de $\mathbb{R}$. On définie les ensembles suivants

$$\begin{array}{rcl} A + B & = & \{x = a + b; \quad a \in A, b \in B\}, \\ -A & = & \{x = -a; \quad a \in A\}, \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} A \cdot B & = & \{x = ab; \quad a \in A, \quad b \in B\}, \\ A^{-1} & = & \{x = 1/a; \quad a \in A\}. \end{array}$$

- Montrer que

$$\mathrm{Sup}(A+B) = \mathrm{Sup}(A) + \mathrm{Sup}(B), \quad \mathrm{Inf}(-A) = -\mathrm{Sup}(A), \quad \mathrm{Sup}(A \cup B) = \mathrm{Max}\{\mathrm{Sup}(A), \mathrm{Sup}(B)\}.$$

- Dans le cas ou $0 \notin A$ montrer que $\mathrm{Inf}(A^{-1}) = [\mathrm{Sup}(A)]^{-1}$.

Exercice 11. Soit $I =]a; b[\subset \mathbb{R}$, montrer que

$$\forall x \in I, \quad \exists\, \varepsilon > 0 : \quad]x - \varepsilon; x + \varepsilon[\subset I.$$

Montrer que l'assertion suivante est fausse

$$\exists\, \varepsilon > 0, \quad \forall x \in I : \quad]x - \varepsilon; x + \varepsilon[\subset I.$$