Université de Tlemcen
Faculté des Sciences
1ière Année LMD-MI
Jeudi: 22/06/2023
Durée : 01 h 30mn

Année Universitaire 2022/2023

Epreuve de rattrapage de Mécanique

Exercice 1: (6 pts)

A) La position d'un mobile, soumis à une force F, est repérée par son abscisse x, à tout instant t suivant la relation : **x=** $\boldsymbol{a.s(bt)}$ **+** $\boldsymbol{F.c}$

Donner la dimension des différentes grandeurs a, b et c. Que pourrait représenter la grandeur c.

B) La vitesse moyenne des molécules d'un gaz s'écrit sous la formule suivante :

$$\boldsymbol{\vartheta = \sqrt{\frac{PV}{m}}}$$

m étant la masse de la molécule, **V** le volume, et **p** la pression du gaz.

Calculer l'incertitude relative sur ϑ en fonction de Δp, Δm et ΔV.

Exercice 2: (8 pts)

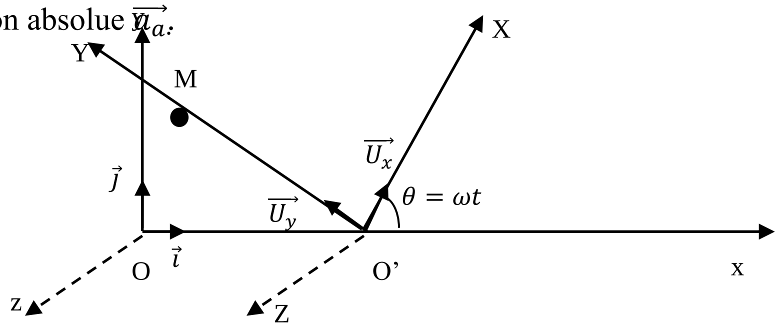
Soit le repère R(Oxyz) et le point O' se déplace sur l'axe (Ox) avec une vitesse constante v_0. On lie à O' le repère (O'XYZ) qui tourne autour de (Oz) avec une vitesse angulaire ω constante. Le mobile M se déplace sur l'axe (O'Y) tel que $\left|\overrightarrow{O'M}\right| = (t^2 + 2)$ (sans vitesse initiale).

A l'instant t=0, l'axe (O'X) est confondu avec (Ox) et le point M est en O'.

Calculer dans le **repère mobile** :

1- La vitesse relative $\overrightarrow{v_r}$ et la vitesse d'entrainement $\overrightarrow{v_e}$, en déduire la vitesse absolue $\overrightarrow{v_a}$.

2- L'accélération relative $\overrightarrow{a_r}$, l'accélération d'entrainement $\overrightarrow{a_e}$ et l'accélération de Coriolis $\overrightarrow{a_c}$, en déduire l'accélération absolue $\overrightarrow{a_a}$.



Exercice 3: (6 pts)

Une particule se déplace sur une trajectoire dont l'équation horaire de la coordonnée y est donnée par : $\mathbf{y(t) = t^2 + 1}$ de telle sorte qu'à chaque instant $\mathbf{v_x = v_0 = cste}$.

Si à t=0, x_0=0 ; déterminer :

1- L'équation de la trajectoire de la particule.

2- La vitesse et l'accélération de la particule.

3- Les accélérations normale et tangentielle ainsi que le rayon de courbure.

Bon courage

Corrigé du rattrapage de mécanique

Exercice 1: (6 pts)

A) La position d'un mobile, soumis à une force F, est repérée par son abscisse x, à tout instant t suivant la relation : x = $a\ sinbt$ +Fc

$[x]$ = $[a\ sinbt]$ +$[Fc]$ (0.5 pts) avec $\begin{cases} [sin] = 1 \\ [t] = T \quad et\ \ [x] = L \\ [F] = MLT^{-2} \end{cases}$ (01 pts)

Donc $[\text{sinbt}] = 1\ et\ [\text{bt}] = 1 \Longrightarrow [\text{b}] = T^{-1}$ (0.5 pts)

d'autre part on a $[a\ sinbt]$= $[x]$ =L donc $[a]$=L (0.5 pts)

ainsi $[x]$ = $[Fc]$ alors [c]= [x]/ [F]=L/M L T^{-2}=M^{-1} T^{2} (0.5 pts)

c représente l'inverse de la contente de raideur k d'un ressort ([k]= [F]/[x]). (0.5pt)

B) L'incertitude relative sur $\boldsymbol{\vartheta}$.

$$\boldsymbol{\vartheta} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{PV}}{\boldsymbol{m}}}$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{\vartheta}^2 = \frac{\boldsymbol{PV}}{\boldsymbol{m}} \Longrightarrow \log(\boldsymbol{\vartheta}^2) = \log\frac{\boldsymbol{PV}}{\boldsymbol{m}} \text{ (0.5 pts)}$$
$$\Longrightarrow 2\log\vartheta = \log P + \log V - \log m \text{ (0.5 pts)}$$
$$\Longrightarrow 2\frac{d\vartheta}{\vartheta} = \frac{dP}{P} + \frac{dV}{V} + \frac{dm}{m} \text{ (0.5 pts)}$$

$$\Longrightarrow 2\frac{\Delta\vartheta}{\vartheta} = \frac{\Delta P}{P} + \frac{\Delta V}{V} + \frac{\Delta m}{m} \text{ (0.5 pts)}$$
$$\Longrightarrow \frac{\Delta\vartheta}{\vartheta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta P}{P} + \frac{\Delta V}{V} + \frac{\Delta m}{m}\right) \text{ (0.5 pts)}$$

Exercice 2 : (8 pts)

1- Les vitesses : (4pts)

M se déplace sur l'axe OY avec une accélération constante donc :

$\overrightarrow{O'M} = (t^2 + 2)\,\overrightarrow{u_y}$ (0.5pts)

O' se déplace sur Ox avec une vitesse constante v_0 donc $\overrightarrow{OO'} = x\vec{\imath}$ et $v_0 = \frac{dx}{dt}$ et à t=0, l'axe (O'X) est confondu avec (Ox).

$v_0 = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \int_0^x dx = v_0 \int_0^t dt$ donc $x = v_0 t$ (à t=0, x_0 (O')=0)

$\overrightarrow{OO'} = v_0 t\vec{\imath}$ (0.5pts)

$\overrightarrow{v_r} = \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} = 2t\,\overrightarrow{\mathbf{u_y}}$ (0.5pts)

$\overrightarrow{v_e} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}$ (0.25pts) avec $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$ (0.25pts)

On a $\overrightarrow{u_x} = cos\theta\vec{\imath} + sin\theta\vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{u_y} = -sin\theta\vec{\imath} + cos\theta\vec{\jmath}$

En utilisant le tableau de passage

	$\overrightarrow{u_x}$	$\overrightarrow{u_y}$
$\vec{\imath}$	Cosθ	-sin θ
$\vec{\jmath}$	Sinθ	cosθ

Donc $\vec{i} = \cos\theta\,\overrightarrow{u_x} - \sin\theta\,\overrightarrow{u_y}$ (0. 5pts)

$\frac{\overrightarrow{dOO'}}{dt} = v_0\,\vec{\imath} = v_0(\cos\omega t\,\overrightarrow{u_x} - \sin\omega t\,\overrightarrow{u_y})$ (0. 5pts)

$\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{u_x} & \overrightarrow{u_y} & \overrightarrow{u_z} \\ 0 & 0 & \omega \\ 0 & (t^2+2) & 0 \end{vmatrix} = -(t^2+2)\omega\,\overrightarrow{u_x}$ (0.25pts)

$\overrightarrow{\mathbf{v_e}} = (-(t^2+2)\omega + v_0\cos\omega t)\,\overrightarrow{\mathbf{u_x}} + (-v_0\sin\omega t)\,\overrightarrow{\mathbf{u_y}}$ (0.25pts)

$\overrightarrow{\mathbf{v_a}} = \overrightarrow{\mathbf{v_r}} + \overrightarrow{\mathbf{v_e}} = (-(t^2+2)\omega + v_0\cos\omega t)\,\overrightarrow{\mathbf{u_x}} + (2t - v_0\sin\omega t)\,\overrightarrow{\mathbf{u_y}}$ (0.5pts)

2- **Les accélérations : (4** pts)

$\overrightarrow{\mathbf{a_r}} = \frac{\overrightarrow{\mathbf{dv_r}}}{\mathbf{dt}} = 2\,\overrightarrow{\mathbf{u_y}}$ (1pts)

$\overrightarrow{a_e} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \frac{\overrightarrow{d\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}$ (0. 5pts)

$\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} = \vec{0}$ (0.25pts)

$\vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{u_x} & -\overrightarrow{u_y} & \overrightarrow{u_z} \\ 0 & 0 & \omega \\ -(t^2+2)\omega & 0 & 0 \end{vmatrix} = -(t^2+2)\omega^2\,\overrightarrow{u_y}$ (0.25pts)

$\overrightarrow{a_e} = -(t^2+2)\omega^2\,\overrightarrow{u_y}$ (0.5pts)

$\overrightarrow{\mathbf{a_c}} = \mathbf{2}\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{\mathbf{v_r}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{u_x} & \overrightarrow{u_y} & \overrightarrow{u_z} \\ 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 2t & 0 \end{vmatrix} = -4t\,\boldsymbol{\omega}\,\overrightarrow{\mathbf{u_x}}$ (0.5pts)

$\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_r} + \overrightarrow{a_e} + \overrightarrow{a_c}$ (0.5pts) donc $\overrightarrow{\mathbf{a_a}} = (-4t\,\omega)\,\overrightarrow{u_x} + (2 - (t^2+2)\omega^2)\overrightarrow{u_y}$ (0.5pts)

<u>Exercice 3</u> : (06 pts)

1- Une particule se déplace sur une trajectoire dont l'équation horaire de y est $\mathbf{y(t)=t^2+1}$ de tellesorte qu'à chaque instant $\mathbf{v_x=v_0=cste}$. (t=0, x_0, y_0 =0).

$v_x = \mathbf{v_0} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \mathbf{v_0}$ donc $dx = \mathbf{v_0}dt \Rightarrow x(t) = \mathbf{v_0}t + \mathbf{x_0} = \mathbf{v_0}t$ (0.5 pts)

En remplaçant t par x on a l'équation de la trajectoire est de la forme : $\boldsymbol{y=(x/v_0)^2+1}$ (01pts)

2- Les composantes de la vitesse et l'accélération

$\begin{cases} v_x(t) = \mathbf{v_0} \\ v_y(t) = \frac{dy(t)}{dt} = 2t \end{cases}$ (0. 5pts) alors $|\vec{v}| = \sqrt{v_0^2 + 4t^2}$ et $v = \mathbf{v_0}\vec{\imath} + 2t\,\vec{\jmath}$ (0. 5pts)

On a $a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d(v_0)}{dt} = 0$ et $a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d(t^2+1)}{dt} = 2$ (0.5pts)

Donc $\overrightarrow{a(t)} = 2\,\vec{\jmath}$ et $|\vec{a}| = 2$ (0. 5pts)

3- Les accélérations normale et tangentielle

L'accélération tangentielle

$a_T = \frac{d|\vec{v}|}{dt} = \frac{8t}{2\sqrt{v_0^2+4t^2}} = \frac{4t}{\sqrt{v_0^2+4t^2}} = \frac{4t}{v_0}$ (01 pts)

L'accélération normale

Nous avons $a^2 = a_N^2 + a_T^2 \Rightarrow a_N^2 = a^2 - a_T^2 = (2)^2 - \left(\frac{4t}{\sqrt{v_0^2+4t^2}}\right)^2$

$a_N^2 = \frac{4(v_0^2+4t^2)-16t^2}{v_0^2+4t^2} = \frac{4v_0^2}{v_0^2+4t^2}$ alors $a_N = \frac{2v_0}{\sqrt{v_0^2+4t^2}} = \frac{2v_0}{v}$ (01 pts)

Le rayon de courbure

$a_N = \frac{v^2}{R} \Rightarrow R = \frac{v^2}{a_N} = \frac{v^3}{2v_0}$(0.5 pts)