ANALYSE I / Rattrapage – Premier Semestre

Date : 25 Juin 2023 – Durée: 01h30 – Coefficient: 60% – Usage des documents et d'outils du calculs est interdit

Exercice 1 (04.00 pts). Soit la fonction F de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \mathrm{Ln}(x+1).$$

- Déterminer $(\mathscr{D}_F)$ le domaine de définition de la fonction F.
- Calculer les limites de la fonction F aux bords de domaine de définition $(\mathscr{D}_F)$.
- Déterminer le point d'intersection de la courbe de F avec l'axe (ox).
- Calculer la dérivé de la fonction F et étudier la monotonie de F.
- Tracer le graphe de F dans un repère orthonormé.

Exercice 2 (04.00 pts). Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{E}(x)}{\mathrm{E}(2x)}, \quad \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}, \quad \lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1} - \frac{1}{x}.$$

Indication : Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $x - 1 < \mathrm{E}(x) \leq x$.

Exercice 3 (06.00 pts). Soit l'équation

$$z^2 - 2z + 2 = 0. \tag{1}$$

- Déterminer z_1 et z_2 les solutions de l'équation (1).
- Écrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.
- Calculer z_1^n et z_2^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4 (06.00 pts). Soit la suite $(u_n)_n$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad u_{n+1} = f(u_n), \quad f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{2}{3x}, \quad u_0 = 2.$$

- Montrer que
$$\forall x \in \left[\frac{2}{\sqrt{3}}, +\infty\right[: \quad f'(x) \geq 0, \quad f(x) \geq \frac{2}{\sqrt{3}}.$$
- Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \geq 2/\sqrt{3}$.
- Montrer que $(u_n)_n$ est une suite décroissante.
- Montrer que $(u_n)_n$ est une suite convergente et calculer ca limite.

ANALYSE I / Rattrapage – Premier Semestre – Solution & Barème

Date : 25 Juin 2023 – Durée: 01h30 – Coefficient: 60% – Usage des documents et d'outils du calculs est interdit

Solution de l'exercise 1. [04.00 pts] Soit la fonction F de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \mathrm{Ln}(x+1).$$

- Détermination de $(\mathscr{D}_F)$ le domaine de définition de la fonction F :

$$\begin{aligned}(\mathscr{D}_F) &= \{x \in \mathbb{R} : \quad x+1 > 0\} \longleftarrow \boxed{00.25 \text{ pt}} \\ &=]-1, +\infty[. \longleftarrow \boxed{00.25 \text{ pt}}\end{aligned}$$

- Calcul des limites de la fonction F aux bords de domaine de définition $(\mathscr{D}_F)$:

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} F(x) &= -\infty \longleftarrow \boxed{00.25 \text{ pt}}, \\ \lim_{x \to +\infty} F(x) &= +\infty. \longleftarrow \boxed{00.25 \text{ pt}}\end{aligned}$$

- Détermination le point d'intersection de la courbe de F avec l'axe (ox) :

$$F(x) = 0 \iff \mathrm{Ln}(x+1) = 0 \iff x+1 = 1 \iff x = 0. \longleftarrow \boxed{00.50 \text{ pt}}$$

  donc le point d'intersection est $(0, F(0)) = (0, 0)$. $\longleftarrow \boxed{00.50 \text{ pt}}$
- Calcul de la dérivé de la fonction F est étudier la monotonie de F :

$$F'(x) = \frac{1}{x+1}. \longleftarrow \boxed{00.50 \text{ pt}}$$

  On a

$$\forall x \in (\mathscr{D}_F) : \quad F'(x) > 0, \longleftarrow \boxed{00.50 \text{ pt}}$$

  donc la fonction F est strictement croissante sur $(\mathscr{D}_F)$.
- La courbe de F : $\boxed{01.00 \text{ pt}}$

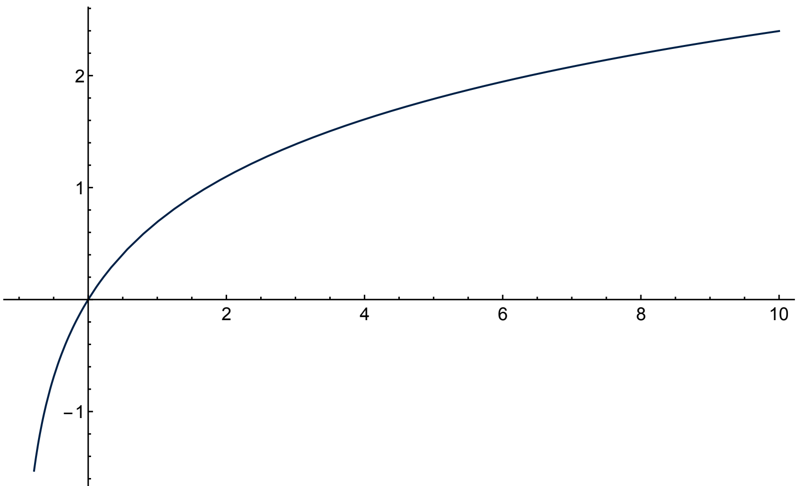

FIGURE 1 – Le graphe de $F(x) = \mathrm{Ln}(x+1)$.

Solution de l'exercise 2. [04.00 pts] Calculer des limites

- Calcule de $\underset{x\to+\infty}{\text{Lim}} \dfrac{\text{E}(x)}{\text{E}(2x)}$: On utilisant le fait que $x-1<\text{E}(x)\leq x$ pour tout $x\in\mathbb{R}$, on obtient

$$x-1<\text{E}(x)\leq x,\quad 2x-1<\text{E}(2x)\leq 2x,$$

pour $x>1$ on obtient

$$0<x-1<\text{E}(x)\leq x,\quad 0<\frac{1}{2x}\leq\frac{1}{\text{E}(2x)}<\frac{1}{2x-1}, \quad \longleftarrow \boxed{00.50 \text{ pt}}$$

d'ou

$$\underbrace{\frac{x-1}{2x}<\frac{\text{E}(x)}{\text{E}(2x)}<\frac{x}{2x-1}}_{\boxed{00.50 \text{ pt}}} \Longrightarrow \overbrace{\underbrace{\underset{x\to+\infty}{\text{Lim}}\frac{x-1}{2x}}_{=1/2}<\underset{x\to+\infty}{\text{Lim}}\frac{\text{E}(x)}{\text{E}(2x)}<\underbrace{\underset{x\to+\infty}{\text{Lim}}\frac{x}{2x-1}}_{=1/2}}^{\boxed{00.50 \text{ pt}}} \Longrightarrow \underbrace{\underset{x\to+\infty}{\text{Lim}}\frac{\text{E}(x)}{\text{E}(2x)}=\frac{1}{2}}_{\boxed{00.50 \text{ pt}}}.$$

- Calcule de $\underset{x\to+\infty}{\text{Lim}} \sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}$:

$$\begin{aligned}\underset{x\to+\infty}{\text{Lim}} \sqrt{x-1}-\sqrt{x+1} &= \underset{x\to+\infty}{\text{Lim}} \frac{\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}\\ &= \underset{x\to+\infty}{\text{Lim}} \frac{-2}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}} \quad \longleftarrow \boxed{00.50 \text{ pt}}\\ &= 0. \quad \longleftarrow \boxed{00.50 \text{ pt}}\end{aligned}$$

- Calcule de $\underset{x\to 0}{\text{Lim}} \sqrt{\dfrac{1}{x^2}-1}-\dfrac{1}{x}$:

$$\begin{aligned}\underset{\substack{x\to 0\\ >}}{\text{Lim}} \sqrt{\frac{1}{x^2}-1}-\frac{1}{x} &= \underset{\substack{x\to 0\\ >}}{\text{Lim}} \frac{\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}-\frac{1}{x}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}+\frac{1}{x}}\\ &= \underset{\substack{x\to 0\\ >}}{\text{Lim}} \frac{-1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}+\frac{1}{x}} \quad \longleftarrow \boxed{00.50 \text{ pt}}\\ &= 0. \quad \longleftarrow \boxed{00.50 \text{ pt}}\end{aligned}$$

Solution de l'exercise 3. [06.00 pts]

- Détermination de z_1 et z_2 solution de $z^2-2z+2=0$: $\overbrace{\text{Le discriminant du polynôme } z^2-2z+2 \text{ vaut } -4}^{\boxed{00.75 \text{ pt}}}$, ce qui donne

$$z_1=1+i,\quad z_2=1-i. \quad \longleftarrow \boxed{00.75 \text{ pt}}$$

- La forme trigonométrique de z_1 et de z_2 : On a $\underbrace{|z_1|=|z_2|=\sqrt{2}}_{\boxed{00.50 \text{ pt}}}$, donc

$$\begin{cases} z_1 = 1+i \\ z_2 = 1-i \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z_1 = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \longleftarrow \boxed{00.50 \text{ pt}} \\ z_2 = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \longleftarrow \boxed{00.50 \text{ pt}} \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) & \longleftarrow \boxed{00.50 \text{ pt}} \\ z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) & \longleftarrow \boxed{00.50 \text{ pt}} \end{cases}$$

- Calcul de z_1^n et z_2^n pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z_1 = \sqrt{2}\,e^{i\pi/4} & \longleftarrow \boxed{00.50 \text{ pt}} \\ z_2 = \sqrt{2}\,e^{-i\pi/4} & \longleftarrow \boxed{00.50 \text{ pt}} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} z_1^n = 2^{n/2}e^{in\pi/4} & \longleftarrow \boxed{00.50 \text{ pt}} \\ z_2^n = 2^{n/2}e^{-in\pi/4} & \longleftarrow \boxed{00.50 \text{ pt}} \end{cases}$$

Solution de l'exercise 4. [06.00 pts] Soit la suite $(u_n)_n$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad u_{n+1} = f(u_n), \quad f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{2}{3x}, \quad u_0 = 2.$$

- On montre que :

$$\forall x \in \left[\frac{2}{\sqrt{3}}, +\infty\right[\; : \quad f'(x) \geq 0, \quad f(x) \geq \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

On a

$$\forall x \in \left[\frac{2}{\sqrt{3}}, +\infty\right[\; : \quad f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{3x^2} = \frac{1}{x^2}\left(x^2 - \frac{4}{3}\right) = \frac{1}{x^2}\left(x - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(x + \frac{2}{\sqrt{3}}\right) \geq 0, \quad \longleftarrow \boxed{01.00 \text{ pt}}$$

donc la fonction f est croissante, ce qui donne

$$\forall x \in \left[\frac{2}{\sqrt{3}}, +\infty\right[\; : \quad f(x) \geq f\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}. \quad \longleftarrow \boxed{01.00 \text{ pt}}$$

- On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \geq 2/\sqrt{3}$:
  - Pour $n = 0$ on a $u_0 = 2 \geq 2/\sqrt{3}$. $\longleftarrow \boxed{00.50 \text{ pt}}$
  - On suppose que $u_n \geq 2/\sqrt{3}$: La fonction f est croissante sur $[2/\sqrt{3}, +\infty[$ et $u_n, 2/\sqrt{3} \in [2/\sqrt{3}, +\infty[$, donc $f(u_n) \geq (2/\sqrt{3}) = 2/\sqrt{3}$. D'où $u_{n+1} \geq 2/\sqrt{3}$. $\longleftarrow \boxed{01.00 \text{ pt}}$
  - Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \geq 2/\sqrt{3}$. $\longleftarrow \boxed{00.50 \text{ pt}}$
- On montre que $(u_n)_n$ est une suite décroissante :

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{2}u_n + \frac{2}{3u_n} = -\frac{1}{2u_n}\left(u_n^2 - \frac{4}{3}\right) = -\frac{1}{2u_n}\left(u_n - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(u_n + \frac{2}{\sqrt{3}}\right), \quad \longleftarrow \boxed{00.50 \text{ pt}}$$

or $u_n \geq 2/\sqrt{3}$, donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$. D'où la suite $(u_n)_n$ est une suite décroissante. $\longleftarrow \boxed{00.50 \text{ pt}}$

- La convergence de $(u_n)_n$:
La suite $(u)_n$ est une suite décroissante minorée donc elle converge. $\longleftarrow \boxed{00.50 \text{ pt}}$
On pose $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$ ceci avec la relation

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{2}{3u_n},$$

donne $l = \frac{1}{2}l + \frac{2}{3l}$, d'où $l = \frac{2}{\sqrt{3}}$. $\longleftarrow \boxed{00.50 \text{ pt}}$