الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Université Abou Bekr Belkaid — جامعة أبي بكر بلقايد

Tlemcen Algérie — تلمسان الجزائر

Faculté des sciences * 1ère Année MI-L1 INFO- L1 ING 2022-2023.**
Module : Algèbre 1 / Examen de rattrapage. (1H30mn)

ice 01 : (4 points) On définit dans $\mathbb{R}^*$ la relation $\Re$ par :

$$x\Re y \Longleftrightarrow x^2 - \frac{1}{x^2} = y^2 - \frac{1}{y^2}.$$

(1) Déterminer la classe d'équivalence de $a \in \mathbb{R}^*$.

(2) Déterminer l'ensemble quotient.

ice 02 : (8 points) Soit $\Re$ la relation définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\forall x, y \in \mathbb{N}, x\Re y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} \text{ tel que : } x = ky.$$

(1) Montrer que $\Re$ est une relation d'ordre dans $\mathbb{N}$.

(2) Cet ordre est-il total ? Justifier.

(3) Déterminer, s'il existent $\sup\{5, 10, 21\}$, $\inf\{5, 10, 21\}$.

Remarque : Ecrire à chaque fois les définitions.

ice 03 : (8 points) Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{3x}{5x^2+2}$.

(1) Etudier l'application f et tracer son tableau des variations.

(2) Dire si f est injective et si elle est surjective? (N'oubliez pas d'écrire les définitions et la justification de votre réponse).

Bon courage.

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Université Abou Bekr Belkaid — جامعة أبي بكر بلقايد
Tlemcen Algérie — تلمسان الجزائر

Faculté des sciences * 1ère Année MI-L1 INFO- L1 ING 2022-2023.**
Module : Algèbre 1 / Examen de rattrapage. (1H30mn)

Correction

ice 01 : (4 points) On définit dans $\mathbb{R}^*$ la relation $\Re$ par :

$$x\Re y \Longleftrightarrow x^2 - \frac{1}{x^2} = y^2 - \frac{1}{y^2}.$$

(2) Déterminons la classe d'équivalence de $a \in \mathbb{R}^*$.

$$cl(a) = \{x \in \mathbb{R}^*/x\Re a\}. \ \textbf{(0.5 point)}$$

On a :

$$\begin{aligned}
x\Re a &\Leftrightarrow x^2 - \frac{1}{x^2} = a^2 - \frac{1}{a^2}, \\
&\Rightarrow x^2 - a^2 = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{a^2} = \frac{a^2 - x^2}{x^2 a^2}, \\
&\Rightarrow \left(x^2 - a^2\right)\left(1 + \frac{1}{x^2 a^2}\right) = 0, \ \textbf{(0.5 point)} \\
&\Rightarrow x^2 - a^2 = 0, \text{ car } 1 + \frac{1}{x^2 a^2} \neq 0, \ \textbf{(0.5 point)} \\
&\Rightarrow x = \pm a \Rightarrow cl(a) = \{a, -a\}. \textbf{(1 point)}
\end{aligned}$$

(3) Déterminons l'ensemble quotient.

$$\textbf{(0.5 point)} \rightarrow \Re/\mathbb{R}^* = \{cl(\alpha), \alpha > 0\} = \{cl(\alpha), \alpha < 0\}. \leftarrow \textbf{(1 point)}$$

e 02 : (08 points) Soit $\Re$ la relation définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\forall x, y \in \mathbb{N}, x\Re y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} \text{ tel que : } x = ky.$$

(1) Montrer que $\Re$ est une relation d'ordre dans $\mathbb{N}$.

nt + 0.25 point) $\Re$ est-elle réflexive ?

$\Re$ est réflexive $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{N}, x\Re x$.

$$\begin{aligned}
\forall x &\in \mathbb{N}, \exists k = 1 \in \mathbb{N}, \ x = 1 \times x \\
&\Rightarrow x\Re x \Rightarrow \Re \text{ est réflexive.}
\end{aligned}$$

nt + 0.75 point) $\Re$ est-elle antisymétrique ?

$\Re$ est antisymétrique $\Leftrightarrow \forall x, y \in \mathbb{N}, x\Re y$ et $y\Re x \Rightarrow x = y$.
Soient $x, y \in \mathbb{N}$,

$$x\Re y \Rightarrow \exists k_1 \in \mathbb{N} \text{ tel que : } x = k_1 y,$$

et

$$y\Re x \Rightarrow \exists k_2 \in \mathbb{N} \text{ tel que : } y = k_2 x,$$

ce qui implique que :

$$\begin{aligned} x &= k_1k_2x \Rightarrow k_1k_2 = 1 \Rightarrow k_1 = k_2 = 1, \\ &\Rightarrow x = y \Rightarrow \Re \text{ est antisymétrique.} \end{aligned}$$

nt + 0.75 point) $\Re$ est-elle transitive ?

$\Re$est transitive $\Leftrightarrow \forall x, y, z \in \mathbb{N}, x\Re y$ et $y\Re z \Rightarrow x\Re z$.
Soient $x, y, z \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} & x\Re y \text{ et } y\Re z \Rightarrow \exists k_1, k_2 \in \mathbb{N}, x = k_1y \text{ et } y = k_2z, \\ & \Rightarrow x = k_1k_2z \Rightarrow \exists k_3 = k_1k_2 \in \mathbb{N}, x = k_3z, \\ & \Rightarrow \Re \text{ est transitive.} \end{aligned}$$

Conclusion : $\Re$ est une relation d'ordre, car elle est réflexive, antisymétrique et transitive.

(2) Cet ordre est-il total ? Justifier et donner la définition de l'ordre total.
L'ordre est total si et seulement si :

$$\forall x, y \in \mathbb{N}, x\Re y \text{ ou } y\Re x.\textbf{(0.5 point)}$$

L'ordre est partiel car pour 2 et 3 : **(1.5 point sur la justification de l'ordre partiel)**

$$\forall k \in \mathbb{N}, (2 \neq k \times 3) \text{ et } (3 \neq k \times 2),$$

alors ni $3\Re 2$ ni $2\Re 3$.

(3) Soit l'ensemble $A = \{6, 10, 21\}$. Déterminer, s'il existent, l'ensemble des majorants, l'ensemble des minorants, $\sup A, \inf A, \max A$ et $\min A$ pour l'ordre $\Re$.

a) M est un majorant de $A \Leftrightarrow \forall x \in A, x\Re M$. **(0.25 point)**

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6\Re M \Leftrightarrow \exists k_1 \in \mathbb{N}, 6 = k_1M \Leftrightarrow M \in \{1, 2, 3, 6\}, \textbf{(0.25 point)} \\ 10\Re M \Leftrightarrow \exists k_2 \in \mathbb{N}, 10 = k_2M \Leftrightarrow M \in \{1, 2, 5, 10\}, \textbf{(0.25 point)} \\ 21\Re M \Leftrightarrow \exists k_2 \in \mathbb{N}, 12 = k_2M \Leftrightarrow M \in \{1, 3, 7, 21\}, \textbf{(0.25 point)} \end{cases}$$

Alors le seuls majorant de A est : 1. **(0.25 point)**

(Toute la ligne 0.25 point) $\sup A = 1 \notin A \Rightarrow \max A$ n'existe pas.

b) m est un majorant de $A \Leftrightarrow \forall x \in A, m\Re x$.**(0.25 point)**

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\Re 6 \Leftrightarrow \exists k_1 \in \mathbb{N}, m = 6k_1 \Leftrightarrow m \in \{0, 6, 12, ...\}, \textbf{(0.25 point)} \\ m\Re 10 \Leftrightarrow \exists k_2 \in \mathbb{N}, m = 10k_2 \Leftrightarrow M \in \{0, 10, 20, ...\}, \textbf{(0.25 point)} \\ m\Re 21 \Leftrightarrow \exists k_2 \in \mathbb{N}, m = 21k_2 \Leftrightarrow M \in \{0, 21, 42, ...\}, \textbf{(0.25 point)} \end{cases}$$

Alors l'ensemble des minorants est :

$$E_{\min} = \{1260k, k \in \mathbb{N}\} . \textbf{(0.5 point)}$$

Mais :

$$0\Re 1260, \forall x \in E_{\min}, x\Re 1260. \textbf{(0.25 point)}$$

(Toute la ligne 0.25 point) $\inf A = 1260 \notin A \Rightarrow \min A$ n'existe pas.

e 03 : **(08 points)** Soit f une application définie par :

$$\begin{array}{rcl} f & : & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = \dfrac{3x}{5x^2+2}. \end{array}$$

(1)

$$D_f = \mathbb{R}. \textbf{ (0.25 point)}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x}{5x^2+2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3}{5x} = 0. \textbf{ (0.25 point)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{5x^2+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{5x} = 0. \textbf{ (0.25 point)}$$

$$f'(x) = \frac{3(5x^2+2) - 30x^2}{(5x^2+2)^2} = 3\frac{2-5x^2}{(5x^2+2)^2}. \textbf{ (0.5 point)}$$

Le signe de la dérivée :

$$-\infty \quad - \quad -\sqrt{\frac{2}{5}} \quad + \quad \sqrt{\frac{2}{5}} \quad - \quad +\infty \textbf{ (0.5 point)}$$

Le tableau des variations : **(1.25 point)**

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{2}{5}}$		$\sqrt{\frac{2}{5}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0				$\frac{3\sqrt{\frac{2}{5}}}{4}$		
			$-\frac{3\sqrt{\frac{2}{5}}}{4}$				0

(2)

a) Pour l'injectivité :

f est injective si et seulement si :

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) . \textbf{(0.5 point)}$$

Il existent deux éléments différents :

$$x_1 \in \left]-\sqrt{\frac{2}{5}}, -\sqrt{\frac{2}{5}}\right[\text{ et } x_2 \in \left]\sqrt{\frac{2}{5}}, +\infty\right[\text{ avec } x_1 \neq x_2 \text{ et } f(x_1) = f(x_2)\,.\mathbf{(0.5\ point)}$$

Donc f n'est pas injective.

b) Pour la surjectivité :

f est surjective si et seulement si :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} \text{ tel que : } f(x) = y.\mathbf{(0.5\ point)}$$

Alors d'après le tableau des variations :

$$f(\mathbb{R}) = \left[-\frac{3\sqrt{\frac{2}{5}}}{4}, \frac{3\sqrt{\frac{2}{5}}}{4}\right] ,\mathbf{(0.75\ point)}$$

donc elle n'est pas surjective sur $\mathbb{R}$ car :

$$\exists y \notin \left[-\frac{3\sqrt{\frac{2}{5}}}{4}, \frac{3\sqrt{\frac{2}{5}}}{4}\right], \forall x \in \mathbb{R} \text{ tel que : } f(x) \neq 0.\mathbf{(0.75\ point)}$$

(1 point+ 1point) D'après le tableau des variations :

$$f\left(\left[-\sqrt{\frac{2}{5}}, \sqrt{\frac{2}{5}}\right]\right) = \left[-\frac{3\sqrt{\frac{2}{5}}}{4}, \frac{3\sqrt{\frac{2}{5}}}{4}\right],$$

donc pour que f soit surjective il suffit de prendre l'ensemble d'arrivé $\left[-\frac{3\sqrt{\frac{2}{5}}}{4}, \frac{3\sqrt{\frac{2}{5}}}{4}\right]$, de plus elle est injective car elle est continue et strictement croissante donc bijective.