Université Aboubekr Belkaid-Tlemcen
Module: Algèbre 1 Epreuve finale . "Examen de remplacement"
1ère Année MI-ING-L1 INF- 2022-2023.

Exercice 01 : Soit $\Re$ la relation d'ordre définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\forall x, y \in \mathbb{N}, x\Re y \Leftrightarrow x \text{ est un multiple de } y.$$

(1) Cet ordre est-il total ? Justifier.

(2) Soit $A = \{4, 5, 12\}$. Déterminer, s'ils existent l'ensemble des majorants de A, l'ensemble des minorants de $A, \sup A, \max A, \inf A$ et $\min A$.

Exercice 02 : Soit $\Re$ la relation d'équivalence définie dans $\mathbb{N}$ par :

$$\forall x, y \in \mathbb{N}, x\Re y \Leftrightarrow (x = y \text{ ou } x + y = 7).$$

(1) Déterminer, en discutant suivant les valeurs de l'entier naturel a, la classe d'équivalence de a.

(2) Déterminer l'ensemble quotient.

Exercice 03 : Soient $f : E \to F$ une application et $A, B \in P(E)$.

(1) Montrer que :
$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B).$$

(2) Donner la condition pour que :

$$f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B).$$

(3) Donner un contre-exemple où cette dernière inclusion n'est pas vérifiée.

(4) Soit f une application telle que :

$$\begin{array}{ccl} f & : & E \to F \\ x & \mapsto & f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}. \end{array}$$

Donner les plus grands intervalles E et F pour que f soit bijective. (Justifier votre réponse).

Université Aboubekr Belkaid-Tlemcen
Module: Algèbre 1 Epreuve finale .
"Le corrigé de l'examen de remplacement"
1ère Année MI-ING-L1 INF- 2022-2023.

Exercice 01 : (7 points) Soit $\Re$ la relation d'ordre définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\forall x, y \in \mathbb{N}, x\Re y \Leftrightarrow x \text{ est un multiple de } y.$$

(1) Cet ordre est-il total ? Justifier.

L'ordre est total si et seulement si :

$$\forall x, y \in \mathbb{N}, x\Re y \text{ ou } y\Re x.(\mathbf{0.5\ point})$$

Dans l'exercice on a :

$$\text{ni 2 multiple de 3, ni 3 multiple de 2}, (\mathbf{0.5\ point})$$

ce qui implique :

$$\text{ni } 2\Re 3 \text{ ni } 3\Re 2.(\mathbf{0.5\ point})$$

donc l'ordre est partiel. **(0.5 point)**

(2) Soit $A = \{4, 5, 12\}$. Déterminer, s'ils existent l'ensemble des majorants de A, l'ensemble des minorants de A, $\sup A$, $\max A$, $\inf A$ et $\min A$.

M est un majorant de A si et seulement si :

$$\forall x \in A, x\Re M, (\mathbf{0.25\ point})$$

donc :

$$\begin{cases} 4\Re M \Rightarrow 4 \text{ multiple de } M \Rightarrow M \in \{1, 2, 4\}\,(\mathbf{0.25\ point}) \\ \text{et } 5\Re M \Rightarrow 5 \text{ multiple de } M \in \{1, 5\}\,(\mathbf{0.25\ point}) \\ \text{et } 12\Re M \Rightarrow 12 \text{ multiple de } M \in \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}\,, (\mathbf{0.25\ point}) \end{cases}$$

alors l'ensemble des majorants est : $\{1\}$ (**0.5 point**), ce qui implique que :

$$\sup A = 1 \notin A(\mathbf{0.5\ point}) \Rightarrow \max A \text{ n'existe pas}.(\mathbf{0.25\ point})$$

m est un minorant de A si et seulement si :

$$\forall x \in A, m\Re x, (\mathbf{0.25\ point})$$

donc :

$$\begin{cases} m\Re 4 \Rightarrow m \text{ multiple de } 4 \Rightarrow M \in \{0, 4, 8, ..., 60, ...\}\,(\mathbf{0.25\ point}) \\ \text{et } m\Re 5 \Rightarrow m \text{ multiple de } 5 \in \{0, 5, ..., 60, ...\}\,(\mathbf{0.25\ point}) \\ \text{et } m\Re 12 \Rightarrow m \text{ multiple de } 12 \in \{0, 12, ..., 60, ...\}\,, (\mathbf{0.25\ point}) \end{cases}$$

alors l'ensemble des minorants est : $\{0, 60, 120, ...\}$ (**0.5 point**), mais :

$$\forall m, m\Re 60.(\mathbf{0.5\ point})$$

ce qui implique que :

$$\inf A = 60 \notin A(\mathbf{0.5\ point}) \Rightarrow \min A \text{ n'existe pas}.(\mathbf{0.25\ point})$$

Exercice 02 : (4 points) Soit $\Re$ la relation d'équivalence définie dans $\mathbb{N}$ par :

$$\forall x, y \in \mathbb{N}, x\Re y \Leftrightarrow (x = y \text{ ou } x + y = 7).$$

(1) Déterminons, en discutant suivant les valeurs de l'entier naturel a, la classe d'équivalence de a.

$cl\,(a) = \{x \in \mathbb{N}/x\Re a\}$,**(0.5 point)**
$x\Re a \Leftrightarrow (x = a \text{ ou } x + a = 7) \Rightarrow (x = a \text{ ou } x = \underbrace{7 - a}_{\in\mathbb{N}})$,**(0.5 point)**

$$\Rightarrow cl\,(a) = \left[\begin{array}{l} \{a, 7-a\} \text{ si } a \leq 7, \\ \{a\} \text{ si } a > 7 \text{ (car dans ce cas } 7 - a \notin \mathbb{N}). \end{array}\right. \quad \textbf{(1.5 point)}$$

(2) Déterminer l'ensemble quotient.

$$\Re/\mathbb{N} = \{cl(0), cl(1), cl(2), cl(3), cl(a), a > 7\}. (\textbf{1.5 point})$$

Exercice 03 : Soient $f : E \to F$ une application et $A, B \in P\,(E)$.

(1) (2 points) Montrons que :

$$f\,(A \cap B) \subset f\,(A) \cap f\,(B).$$

Soit

$$\begin{aligned} y &\in f\,(A \cap B) \Rightarrow \exists x \in A \cap B \text{ tel que : } f\,(x) = y \\ &\Rightarrow (\exists x \in A \text{ et } \exists x \in B) \text{ tel que : } f\,(x) = y, \\ &\Rightarrow (\exists x \in A \text{ tel que : } f\,(x) = y) \text{ et } (\exists x \in B \text{ tel que : } f\,(x) = y), \\ &\Rightarrow y \in f\,(A) \text{ et } y \in f\,(B), \\ &\Rightarrow y \in f\,(A) \cap f\,(B). \end{aligned}$$

(2) (1.5 point) Donner la condition pour que :

$$f\,(A) \cap f\,(B) \subset f\,(A \cap B).$$

La condition il faut que f soit injective, car :

$$\begin{aligned} y &\in f\,(A) \cap f\,(B) \Rightarrow y \in f\,(A) \text{ et } y \in f\,(B), \\ &\Rightarrow (\exists x_1 \in A \text{ tel que : } f\,(x_1) = y) \text{ et } (\exists x_2 \in B \text{ tel que : } f\,(x_2) = y), \end{aligned}$$

mais f est injective alors : $x_1 = x_2 = x$, ce qui implique que :

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \exists x \in A \text{ et } \exists x \in B \text{ tel que : } f\,(x) = y, \\ &\Rightarrow \exists x \in A \cap B \text{ tel que : } f\,(x) = y, \\ &\Rightarrow y \in f\,(A \cap B). \end{aligned}$$

(3) (2 points) Donner un contre-exemple où cette dernière inclusion n'est pas vérifiée.

$$A = \{1\}, B = \{-1\} \text{ et } f(x) = |x| \text{ sur } \mathbb{R},$$

alors :

$$A \cap B = \varnothing \Rightarrow f(A \cap B) = f(\varnothing) = \varnothing,$$

et

$$f(A) = f(B) = \{1\} \Rightarrow f(A) \cap f(B) \neq f(A \cap B).$$

(4) Soit f une application telle que :

$$\begin{array}{ccl} f & : & E \to F \\ x & \mapsto & f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}. \end{array}$$

Donner les plus grands intervalles E et F pour que f soit bijective. (Justifier votre réponse).

$$\begin{aligned} D_f &= \left\{x \in \mathbb{R} / x^2 + x + 1 > 0\right\}. \\ x^2 + x + 1 &= 0 \Leftrightarrow \triangle = -3 < 0 \Rightarrow x^2 + x + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}.\textbf{(0.5 point)} \\ D_f &= \mathbb{R}.\textbf{(0.5 point)} \end{aligned}$$

(2) Calculer la dérivée et tracer le tableau des variations de la fonction f.

Les limites :

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} &= \lim_{x \to -\infty} |x| \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = +\infty.\textbf{(0.5 point)} \\ \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} &= \lim_{x \to +\infty} |x| \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = +\infty\textbf{(0.5 point)} \end{aligned}$$

La dérivée :

$$f'(x) = \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x + 1}}.\textbf{(0.5 point)}$$

$$\underrightarrow{-\infty \quad - \quad \frac{-1}{2} \quad + \quad +\infty} \ \textbf{(0.5 point)}$$

x	$-\infty$		$\frac{-1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$ **(1 point)**

Pour les plus grands intervalles où f soit bijective on a :

1er cas : (0.75 point)

$$\begin{array}{rcl} g & : & \left]-\infty, \dfrac{-1}{2}\right[\to \left]\dfrac{\sqrt{3}}{2}, +\infty\right[\\ x & \mapsto & g(x) = \sqrt{x^2+x+1}. \end{array}$$

car la fonction est continue et strictement décroissante donc elle est injective et elle est surjective car $g\left(\left]-\infty, \frac{-1}{2}\right[\right) = \left]\frac{\sqrt{3}}{2}, +\infty\right[$, donc bijective.

2ème cas : (0.75 point)

$$\begin{array}{rcl} g & : & \left]\dfrac{-1}{2}, +\infty\right[\to \left]\dfrac{\sqrt{3}}{2}, +\infty\right[\\ x & \mapsto & g(x) = \sqrt{x^2+x+1}. \end{array}$$

car la fonction est continue et strictement décroissante donc elle est injective et elle est surjective car $g\left(\left]\frac{-1}{2}, +\infty\right[\right) = \left]\frac{\sqrt{3}}{2}, +\infty\right[$, donc bijective.