Université Abou Bekr Belkaid – Tlemcen
Faculté des sciences – Tidjani Haddam
Département de Mathématiques

Analyse I

Épreuve Final Du Premier Semestre

Durée: 01h30 – Coefficient: 60% – Usage des documents et d'outils du calculs est interdit

Exercice 1 (06,50 pts). Déterminer la borne supérieur, la borne inférieure, le maximum et le minimum des l'ensembles suivantes :

$$\mathcal{A} = \left\{ -1 + \frac{(-1)^n}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N} \right\}, \quad \mathcal{B} = \left\{ \frac{2n + (-1)^n}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Exercice 2 (05,50 pts). Soit $c \in \mathbb{C}$ tel que $|c| < 1$.

- Montrer que
$$|z + c| \leq |1 + \bar{c}z| \iff |z| \leq 1.$$
- Soit $\mathcal{D}$ le disque de centre zéro et de rayon un et $\mathcal{C}$ le cercle du centre zéro et de rayon un. On définit l'application f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ par
$$f(z) = \frac{z + c}{1 + \bar{c}z}.$$
Montrer que f est une application de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}$ satisfait $f(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}$.

Exercice 3 (05 pts). Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha \in]-\pi, +\pi[$.

- Déterminer les solutions z_1 et z_2 de l'équation
$$z^2 - 2r\cos(\alpha)z + r^2 = 0.$$
- Calculer, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, le nombre P_n défini par
$$P_n = z_1^n + z_2^n.$$

Exercice 4 (03 pts). Soit la suite $(u_n)_n$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{2}{3u_n}, \quad u_0 = 2.$$

- Montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \geq 2/\sqrt{3}$.
- Montrer que $(u_n)_n$ est une suite décroissante.
- Montrer que $(u_n)_n$ est une suite convergente et calculer ca limite.

ANALYSE I

Solution & Barème De L'Épreuve Final Du Premier Semestre

Durée: 01h30 – Coefficient: 60% – Usage des documents et d'outils du calculs est interdit

Exercice 1 (06,50 pts). Détermination de la borne supérieur, la borne inférieure, le maximum et le minimum

- Pour $\mathcal{A} = \left\{ -1 + \frac{(-1)^n}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N} \right\}$: L'ensemble $\mathcal{A}$ peut être exprimer par

$$\mathcal{A} = \underbrace{\left\{ -1 + \frac{1}{2p+1}, \quad p \in \mathbb{N} \right\}}_{=\mathcal{A}_1} \cup \underbrace{\left\{ -1 - \frac{1}{2p+2}, \quad p \in \mathbb{N} \right\}}_{=\mathcal{A}_2}. \quad \boxed{00,25 \text{ pt}}$$

La fonction $f_1(n) = -1 + \frac{1}{2p+1}$ est croissante sur $\mathbb{N}$, donc

$$\operatorname{Inf} \mathcal{A}_1 = \lim_{n\to+\infty} f_1(n) = -1 \quad \boxed{00,25 \text{ pt}}, \quad \operatorname{Sup} \mathcal{A}_1 = f_1(0) = 0, \quad \boxed{00,25 \text{ pt}}$$

et donc

$$\operatorname{Min} \mathcal{A}_1 = \nexists \quad \boxed{00,25 \text{ pt}}, \quad \operatorname{Max} \mathcal{A}_1 = \operatorname{Sup} C_1 = 0. \quad \boxed{00,25 \text{ pt}}$$

La fonction $f_2(n) = -1 - \frac{1}{2p+2}$ est décroissante sur $\mathbb{N}$, donc

$$\operatorname{Inf} \mathcal{A}_2 = f_2(0) = -\frac{3}{2} \quad \boxed{00,25 \text{ pt}}, \quad \operatorname{Sup} \mathcal{A}_2 = \lim_{n\to+\infty} f_2(n) = -1, \quad \boxed{00,25 \text{ pt}}$$

et donc

$$\operatorname{Min} \mathcal{A}_2 = -\frac{3}{2} \quad \boxed{00,25 \text{ pt}}, \quad \operatorname{Max} \mathcal{A}_2 = \nexists. \quad \boxed{00,25 \text{ pt}}$$

Conclusion :

$$\operatorname{Sup} \mathcal{A} = \operatorname{Max}\{\operatorname{Sup} \mathcal{A}_1, \operatorname{Sup} \mathcal{A}_2\} = \operatorname{Sup} \mathcal{A}_1 = 0 \quad \boxed{00,25 \text{ pt}}, \quad \operatorname{Max} \mathcal{A} = \operatorname{Max} \mathcal{A}_1 = 0, \quad \boxed{00,25 \text{ pt}}$$

$$\operatorname{Inf} \mathcal{A} = \operatorname{Min}\{\operatorname{Inf} \mathcal{A}_1, \operatorname{Inf} \mathcal{A}_2\} = \operatorname{Inf} \mathcal{A}_2 = -\frac{3}{2}, \quad \boxed{00,25 \text{ pt}} \quad \operatorname{Min} \mathcal{A} = \nexists. \quad \boxed{00,25 \text{ pt}}$$

- Pour $\mathcal{B} = \left\{ \frac{2n + (-1)^n}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N} \right\}$: L'ensemble $\mathcal{B}$ peut être exprimer par

$$\mathcal{B} = \underbrace{\left\{ \frac{4p+1}{2p+1}, \quad p \in \mathbb{N} \right\}}_{=\mathcal{B}_1} \cup \underbrace{\left\{ \frac{4p+1}{2p+2}, \quad p \in \mathbb{N} \right\}}_{=\mathcal{B}_2} \quad \boxed{00,25 \text{ pt}}$$

La fonction $g_1(x) = \frac{4x+1}{2x+1}$ est croissante car $g_1'(x) = \frac{2}{(2x+1)^2} > 0$, d'où

$$\operatorname{Inf} \mathcal{B}_1 = g_1(0) = 1 \quad \boxed{00,25 \text{ pt}}, \quad \operatorname{Sup} \mathcal{B}_1 = \lim_{p\to+\infty} g_1(p) = 2. \quad \boxed{00,25 \text{ pt}}$$

et donc

$$\text{Min}\,\mathcal{B}_1 = 1 \;\boxed{00{,}25\text{ pt}},\quad \text{Max}\,\mathcal{B}_1 = \nexists. \;\boxed{00{,}25\text{ pt}}$$

La fonction $g_2(x) = \dfrac{4x+1}{2x+2}$ est croissante car $g_2'(x) = \dfrac{6}{(2x+2)^2} > 0$, d'où

$$\text{Inf}\,\mathcal{B}_2 = g_2(0) = \frac{1}{2} \;\boxed{00{,}25\text{ pt}},\quad \text{Sup}\,\mathcal{B}_2 = \lim_{p\to+\infty} g_2(p) = 2. \;\boxed{00{,}25\text{ pt}}$$

et donc

$$\text{Min}\,\mathcal{B}_2 = \frac{1}{2} \;\boxed{00{,}25\text{ pt}},\quad \text{Max}\,\mathcal{B}_1 = \nexists. \;\boxed{00{,}25\text{ pt}}$$

Conclusion :

$$\text{Sup}\,\mathcal{B} = \text{Max}\{\text{Sup}\,\mathcal{B}_1, \text{Sup}\,\mathcal{B}_2\} = \text{Sup}\,\mathcal{B}_1 = 2 \;\boxed{00{,}25\text{ pt}},\quad \text{Max}\,\mathcal{B} = \nexists, \;\boxed{00{,}25\text{ pt}}$$

$$\text{Inf}\,\mathcal{B} = \text{Min}\{\text{Inf}\,\mathcal{B}_1, \text{Inf}\,\mathcal{B}_2\} = \text{Inf}\,\mathcal{B}_2 = \frac{1}{2} \;\boxed{00{,}25\text{ pt}},\quad \text{Min}\,\mathcal{B} = \frac{1}{2}. \;\boxed{00{,}25\text{ pt}}$$

Exercice 2 (05,50 pts). Soit $c \in \mathbb{C}$ tel que $|c| < 1$.

- On montre que $|z+c| \le |1+\bar{c}z|$ si et seulement si $|z| \le 1$. $\longleftarrow$ $\boxed{02{,}00\text{ pt}}$

$$\begin{aligned}
|z+c| \le |1+\bar{c}z| &\iff |z+c|^2 \le |1+\bar{c}z|^2 \\
&\iff (z+c)(\bar{z}+\bar{c}) \le (1+\bar{c}z)(1+c\,\bar{z}) \\
&\iff z\bar{z} + z\bar{c} + c\bar{z} + c\bar{c} \le 1 + c\,\bar{z} + \bar{c}z + \bar{c}zc\bar{z} \\
&\iff |z|^2 + |c|^2 \le 1 + |c|^2|z|^2 \\
&\iff |z|^2(1-|c|^2) \le 1 - |c|^2 \\
&\qquad \uparrow \\
&\qquad \text{On utilise le fait que } |c| < 1 \\
&\qquad \downarrow \\
&\iff |z|^2 \le 1 \\
&\iff |z| \le 1
\end{aligned}$$

- Soit $\mathcal{D}$ le disque de centre zéro et de rayon un et $\mathcal{C}$ le cercle du centre zéro et de rayon un. On définit l'application f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ par

$$f(z) = \frac{z+c}{1+\bar{c}z}.$$

  – On montre que f est une application de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}$: $\longleftarrow$ $\boxed{01{,}50\text{ pt}}$
  On a déjà monter que $|z+c| \le |1+\bar{c}z|$ si et seulement si $|z| \le 1$ ce qui donne

$$|z| \le 1 \iff |f(z)| = \left|\frac{z+c}{1+\bar{c}z}\right| \le 1,$$

  donc f est une application de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}$.
  – On montre que f satisfait $f(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}$: $\longleftarrow$ $\boxed{02{,}00\text{ pt}}$
  Soit $w \in f(\mathcal{C})$ donc il existe $z \in \mathcal{C}$ tel que $w = f(z) = \dfrac{z+c}{1+\bar{c}z}$, ce qui donne

$$|w|^2 = \left|\frac{z+c}{1+\bar{c}z}\right|^2 = \frac{|z+c|^2}{|1+\bar{c}z|^2} = \frac{(z+c)(\bar{z}+\bar{c})}{(1+\bar{c}z)(1+c\bar{z})} = \frac{z\bar{z}+c\bar{c}+z\bar{c}+c\bar{z}}{1+c\bar{z}+\bar{c}z+\bar{c}zc\bar{z}}$$

  on utilise le fait que $z \in \mathcal{C}$, donc $z\bar{z} = |z|^2 = 1$, ce qui donne

$$|w|^2 = \frac{1+c\bar{c}+z\bar{c}+c\bar{z}}{1+c\bar{z}+\bar{c}z+\bar{c}c} = 1,$$

  alors $w \in \mathcal{C}$ et donc pour tout $w \in f(\mathcal{C})$ on a $w \in \mathcal{C}$, donc $f(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}$.

Exercice 3 (05 pts). Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha \in]-\pi, +\pi[$.

- Détermination de z_1 et z_2 les solution de l'équation

$$z^2 - 2r\cos(\alpha)z + r^2 = 0.$$

L'équation en question est un polynôme de degré deux avec un discriminant

$$\Delta = 4r^2(\cos\alpha)^2 - 4r^2 = -4r^2(\sin\alpha)^2 < 0, \qquad \longleftarrow \boxed{01,00 \text{ pt}}$$

donc elle admet deux solution

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{2r\cos\alpha + 2ir\sin\alpha}{2} = re^{i\alpha}, \quad \boxed{01,00 \text{ pt}} \\ z_2 &= \frac{2r\cos\alpha - 2ir\sin\alpha}{2} = re^{-i\alpha}, \quad \boxed{01,00 \text{ pt}} \end{aligned}$$

- Le Calcul du nombre $P_n = z_1^n + z_2^n$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$:

$$z_1^n + z_2^n = 2r^n\cos(n\alpha). \qquad \longleftarrow \boxed{02,00 \text{ pt}}$$

Exercice 4 (03 pts). Soit la suite $(u_n)_n$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{2}{3u_n}, \quad u_0 = 2.$$

- On montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \geq 2/\sqrt{3}$: $\longleftarrow \boxed{00,50 \text{ pt}}$
  Par récurrence sur l'entier $n \in \mathbb{N}$
  - Pour $n = 0$ on a $u_0 = 2 \geq 2/\sqrt{3}$.
  - On suppose que $u_n \geq 2/\sqrt{3}$: Soit la fonction $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{2}{3x}$, on a

$$\forall x \geq 2/\sqrt{3} : \quad f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{3x^2} = \frac{1}{x^2}\left(x^2 - \frac{4}{3}\right) = \frac{1}{x^2}\left(x - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(x + \frac{2}{\sqrt{3}}\right) > 0$$

    donc la fonction f est croissante ce qui donne $f(u_n) \geq (2/\sqrt{3}) = 2/\sqrt{3}$ et donc $u_{n+1} \geq 2/\sqrt{3}$.
  - Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \geq 2/\sqrt{3}$.
- On montre que $(u_n)_n$ est une suite décroissante : $\longleftarrow \boxed{00,50 \text{ pt}}$

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{2}u_n + \frac{2}{3u_n} = -\frac{1}{2u_n}\left(u_n^2 - \frac{4}{3}\right) = -\frac{1}{2u_n}\left(u_n - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(u_n + \frac{2}{\sqrt{3}}\right),$$

  ceci avec le fait que $u_n \geq 2/\sqrt{3}$ on obtient $u_{n+1} - u_n \leq 0$, donc la suite $(u_n)_n$ est une suite décroissante.
- La convergence de $(u_n)_n$: $\longleftarrow \boxed{02,00 \text{ pt}}$
  La suite $(u)_n$ est une suite décroissante minorée donc elle converge, on pose $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ ceci avec la relation $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{2}{3u_n}$ donne $l = \frac{1}{2}l + \frac{2}{3l}$, d'où $l = \frac{2}{\sqrt{3}}$.