ANALYSE I

Examen de Remplacement du Contrôle Continue du Premier Semestre

Durée: 01h30 – Coefficient: 40% – Usage des documents et d'outils du calculs est interdit

Exercice 1 (04 pts). Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer par récurrence que

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2.$$

Exercice 2 (04 pts).

- Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Montrer que si $\mathrm{E}(\alpha) = \mathrm{E}(\beta)$ alors $|\alpha - \beta| \in [0; 1[$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer que
$$\mathrm{E}\left(\frac{x}{2}\right) + \mathrm{E}\left(\frac{x+1}{2}\right) = \mathrm{E}(x).$$
- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante
$$\mathrm{E}\left(\frac{x}{2} + 1\right) + x - 2 = 0.$$

Exercice 3 (04 pts). Soit le sous ensemble $\mathcal{A}$ de $\mathbb{R}$ défini par

$$\mathcal{A} = \left\{ x \in \mathbb{R} : \quad \frac{(\mathrm{E}(x))^2}{\mathrm{E}(x) + 2} \geq 1, \quad \mathrm{E}(x) < 4 \right\}.$$

- En utilisant la caractérisation de la borne inférieure et de la borne supérieure, déterminer $\mathrm{Sup}(\mathcal{A})$ et $\mathrm{Inf}(\mathcal{A})$.
- Déterminer, s'il existe, l'élément maximale et l'élément minimale de l'ensemble $\mathcal{A}$.

Exercice 4 (04 pts). Donner la forme algébrique et trigonométrique des solutions de l'équation suivante

$$z^4 + \sqrt{2}\, z^2 + 1 = 0.$$

Exercice 5 (04 pts). Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes, montrer que

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right).$$

M. Houbad, m.houbad@gmail.com, Tlemcen le 20 Décembre 2022

Université Abou Bekr Belkaid, 13000, Tlemcen, Algérie, www.univ-tlemcen.dz

ANALYSE I

Examen de Remplacement du Contrôle Continue du Premier Semestre
Solution & Barème

Durée: 01h30 – Coefficient: 40% – Usage des documents et d'outils du calculs est interdit

Exercice 1 (04 pts). Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$. On montrer par récurrence que

$$P(n) = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2 = Q(n).$$

- Pour $n = 1$: On a $P(1) = 1$ et $Q(1) = 1$ donc $P(1) \geq Q(1)$.
- On suppose que $P(n) \geq Q(n)$:

$$\begin{aligned}
P(n+1) &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1})\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+1}}\right) \\
&= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) + \\
&\quad a_{n+1}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) + \\
&\quad (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\frac{1}{a_{n+1}} + 1 \\
&= P(n) + 1 + \left(\frac{a_{n+1}}{a_1} + \cdots + \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) + \left(\frac{a_1}{a_{n+1}} + \cdots + \frac{a_n}{a_{n+1}}\right) \\
&= P(n) + 1 + \left(\frac{a_{n+1}}{a_1} + \frac{a_1}{a_{n+1}}\right) + \cdots + \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_{n+1}}\right) \\
P(n+1) &= P(n) + 1 + \left(\frac{a_{n+1}^2 + a_1^2}{a_1 a_{n+1}}\right) + \cdots + \left(\frac{a_{n+1}^2 + a_n^2}{a_n a_{n+1}}\right). \qquad (1)
\end{aligned}$$

Or, pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ on a $(\alpha - \beta)^2 \geq 0$, donc $(\alpha^2 + \beta^2)/\alpha\beta \geq 2$. Ceci transforme (1) en

$$\begin{aligned}
P(n+1) &= \underbrace{P(n)}_{\geq n^2} + 1 + \underbrace{\left(\frac{a_{n+1}^2 + a_1^2}{a_1 a_{n+1}}\right)}_{\geq 2} + \cdots + \underbrace{\left(\frac{a_{n+1}^2 + a_n^2}{a_n a_{n+1}}\right)}_{\geq 2} \\
&\geq n^2 + 1 + 2n = (n+1)^2.
\end{aligned}$$

- Conclusion : $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$ on a

$$P(n) = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2 = Q(n).$$

Exercice 2 (04 pts).

- Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tel que $\mathrm{E}(\alpha) = \mathrm{E}(\beta)$. $\longleftarrow$ $\boxed{01.00 \text{ pt}}$
  On a
  $$\mathrm{E}(\alpha) \leq \alpha < \mathrm{E}(\alpha) + 1, \quad \mathrm{E}(\beta) \leq \beta < \mathrm{E}(\beta) + 1,$$
  ce qui donne
  $$\mathrm{E}(\alpha) \leq \alpha < \mathrm{E}(\alpha) + 1, \quad -\mathrm{E}(\beta) - 1 < \beta \leq -\mathrm{E}(\beta),$$
  d'où
  $$\mathrm{E}(\alpha) - \mathrm{E}(\beta) - 1 < \alpha - \beta < \mathrm{E}(\alpha) + 1 - \mathrm{E}(\beta),$$
  on utilise le fait que $\mathrm{E}(\alpha) = \mathrm{E}(\beta)$, on obtient $-1 < \alpha - \beta < 1$ ce qui donne que $|\alpha - \beta| \in [0; 1[$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$, On montre que
  $$\mathrm{E}\left(\frac{x}{2}\right) + \mathrm{E}\left(\frac{x+1}{2}\right) = \mathrm{E}(x).$$
  - Si $\mathrm{E}(x) = 2n$ avec $n \in \mathbb{Z}$: $\longleftarrow$ $\boxed{01.00 \text{ pt}}$
    On obtient
    $$2n \leq x < 2n + 1$$
    donc
    $$n \leq \frac{x}{2} < n + \frac{1}{2}, \quad n + \frac{1}{2} \leq \frac{x+1}{2} < n + 1,$$
    et donc
    $$n \leq \frac{x}{2} < n + 1, \quad n \leq \frac{x+1}{2} < n + 1,$$
    ce qui donne que
    $$\mathrm{E}\left(\frac{x}{2}\right) = n, \quad \mathrm{E}\left(\frac{x+1}{2}\right) = n,$$
    et donc
    $$\mathrm{E}\left(\frac{x}{2}\right) + \mathrm{E}\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2n = \mathrm{E}(x).$$
  - Si $\mathrm{E}(x) = 2n + 1$ avec $n \in \mathbb{Z}$: $\longleftarrow$ $\boxed{01.00 \text{ pt}}$
    On obtient
    $$2n + 1 \leq x < 2n + 2$$
    donc
    $$n + \frac{1}{2} \leq \frac{x}{2} < n + 1, \quad n + 1 \leq \frac{x+1}{2} < n + \frac{3}{2},$$
    donc
    $$n \leq \frac{x}{2} < n + 1, \quad n + 1 \leq \frac{x+1}{2} < (n+1) + 1,$$
    d'où
    $$\mathrm{E}\left(\frac{x}{2}\right) = n, \quad \mathrm{E}\left(\frac{x+1}{2}\right) = n + 1,$$
    donc
    $$\mathrm{E}\left(\frac{x}{2}\right) + \mathrm{E}\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2n + 1 = \mathrm{E}(x).$$
- Résolution de l'équation : $\longleftarrow$ $\boxed{01.00 \text{ pt}}$
  $$\mathrm{E}\left(\frac{x}{2} + 1\right) + x - 2 = 0.$$
  On a
  $$\frac{x}{2} < \mathrm{E}\left(\frac{x}{2} + 1\right) \leq \frac{x}{2} + 1,$$
  l'équation $\mathrm{E}\left(\frac{x}{2} + 1\right) + x - 2 = 0$ donne $\mathrm{E}\left(\frac{x}{2} + 1\right) = 2 - x$, d'où
  $$\frac{x}{2} < 2 - x \leq \frac{x}{2} + 1,$$
  ce qui donne $x/2 < 2 - x$ et $2 - x \leq x/2 + 1$, donc $x \in [2/3; 4/3[$.

Exercice 3 (04 pts). Soit le sous ensemble $\mathcal{A}$ de $\mathbb{R}$ défini par

$$\mathcal{A} = \left\{ x \in \mathbb{R} : \quad \frac{(\mathrm{E}(x))^2}{\mathrm{E}(x)+2} \geq 1, \quad \mathrm{E}(x) < 4 \right\}.$$

- Utilisation de la caractérisation de la borne inférieure et de la borne supérieure pour déterminer $\mathrm{Sup}(\mathcal{A})$ et $\mathrm{Inf}(\mathcal{A})$.

$$\begin{aligned}
\frac{(\mathrm{E}(x))^2}{\mathrm{E}(x)+2} \geq 1, \quad \mathrm{E}(x) < 4 &\iff (\mathrm{E}(x))^2 - \mathrm{E}(x) - 2 > 0, \quad \mathrm{E}(x)+2 > 0, \quad \mathrm{E}(x) < 4 \\
&\iff \left(\mathrm{E}(x) - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 > 0, \quad \mathrm{E}(x)+2 > 0, \quad \mathrm{E}(x) < 4 \\
&\iff \left(\mathrm{E}(x) - \frac{1}{2}\right)^2 > \frac{9}{4}, \quad \mathrm{E}(x)+2 > 0, \quad \mathrm{E}(x) < 4 \\
&\iff \mathrm{E}(x) - \frac{1}{2} \in \left]-\infty; -\frac{3}{3}\right[\cup \left]\frac{3}{3}; +\infty\right[, \quad \mathrm{E}(x)+2 > 0, \quad \mathrm{E}(x) < 4 \\
&\iff \mathrm{E}(x) \in]-\infty; -1[\cup]2; +\infty[, \quad \mathrm{E}(x)+2 > 0, \quad \mathrm{E}(x) < 4 \\
&\iff 2 < \mathrm{E}(x) < 4 \\
&\iff x \in]2; 4[. \qquad \longleftarrow \boxed{01.00 \text{ pt}}
\end{aligned}$$

donc $\mathcal{A} =]2; 4[$.

- On montrer que $\mathrm{Sup}(\mathcal{A}) = 4$: On a

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists x \in \mathcal{A} : \quad 4 - \varepsilon < x,$$

il suffit de prendre $x \in]4-\varepsilon; 4[\cap]2; 4[$. $\longleftarrow \boxed{01.00 \text{ pt}}$

- On montrer que $\mathrm{Inf}(\mathcal{A}) = 2$: On a

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists x \in \mathcal{A} : \quad 2 + \varepsilon > x,$$

il suffit de prendre $x \in]2; 2+\varepsilon[\cap]2; 4[$. $\longleftarrow \boxed{01.00 \text{ pt}}$

- Détermination de l'élément maximale et l'élément minimale de l'ensemble $\mathcal{A}$:
  - Vu que $\mathrm{Sup}(\mathcal{A}) = 4 \notin \mathcal{A}$ donc $\mathrm{Max}(\mathcal{A})$ n'existe pas. $\longleftarrow \boxed{00.50 \text{ pt}}$
  - Vu que $\mathrm{Inf}(\mathcal{A}) = 2 \notin \mathcal{A}$ donc $\mathrm{Min}(\mathcal{A})$ n'existe pas. $\longleftarrow \boxed{00.50 \text{ pt}}$

Exercice 4 (04 pts). La forme algébrique et trigonométrique des solutions de l'équation

$$z^4 + \sqrt{2}\, z^2 + 1 = 0.$$

Dans un premier lieu on a

$$z^4 + \sqrt{2}\, z^2 + 1 = \left(z^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1 = \left(z^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

donc

$$\begin{aligned}
z^4 + \sqrt{2}\, z^2 + 1 = 0 &\iff \left(z^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = -\frac{1}{2} \\
&\iff z^2 + \frac{\sqrt{2}}{2} = \pm i \frac{\sqrt{2}}{2} \\
&\iff z^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 \pm i)
\end{aligned}$$

donc $z^2 = e^{(1+2\pi k)i}$ ou $z^2 = e^{(-1+2\pi k)i}$ avec $k \in \mathbb{Z}$, d'où les racines de $z^4 + \sqrt{2}\, z^2 + 1 = 0$ sont

$$z = e^{(1/2+\pi k)i}, \quad \text{ou} \quad z = e^{(-1/2+\pi k)i}, \quad k \in \{0, 1\},$$

finalement

$$\begin{aligned}
z_1 &= e^{i/2} = \cos(1/2) + i\sin(1/2), \qquad \longleftarrow \boxed{01.00 \text{ pt}}\\
z_2 &= e^{(1/2+\pi)i} = \cos(1/2+\pi) + i\sin(1/2+\pi) = -\cos(1/2) - i\sin(1/2), \qquad \longleftarrow \boxed{01.00 \text{ pt}}\\
z_3 &= \cos(-1/2) + i\sin(-1/2) = \cos(1/2) - i\sin(1/2), \qquad \longleftarrow \boxed{01.00 \text{ pt}}\\
z_4 &= \cos(-1/2+\pi) + i\sin(-1/2+\pi) = -\cos(1/2) + i\sin(1/2). \qquad \longleftarrow \boxed{01.00 \text{ pt}}
\end{aligned}$$

Exercice 5 (04 pts). Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes, on a

$$\begin{aligned}
|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 &= (z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)} + (z_1-z_2)\overline{(z_1-z_2)}\\
&= (z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2}) + (z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2})\\
&= z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} + z_1\overline{z_1} - z_1\overline{z_2} - z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2}\\
&= 2z_1\overline{z_1} + 2z_2\overline{z_2}\\
&= 2(|z_1|^2 + |z_2|^2).
\end{aligned}$$