ANALYSE I

Contrôle Continue Du Premier Semestre

Durée: 01h30 – Coefficient: 40% – Usage des documents et d'outils du calculs est interdit

Exercice 1 (04 pts). Sachant que pour $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ premier on a $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$, discuter si les nombres suivants sont rationnels ou irrationnels :

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}, \quad \sqrt[3]{2}+\sqrt{2}, \quad \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}}.$$

Exercice 2 (04 pts). Soit $\mathcal{A}$ le sous ensemble de $\mathbb{R}$ défini par

$$\mathcal{A} = \left\{ x \in \mathbb{R}_+ : \quad \frac{x^4}{x^2+1} < 2 \right\}.$$

- Déterminer le $\mathrm{Sup}(\mathcal{A})$ en utilisant la caractérisation de la borne supérieure.
- Déterminer, si il existe, l'élément maximale de l'ensemble $\mathcal{A}$.

Exercice 3 (04 pts). On rappelle que $[x]$ désigne la partie entière de x avec $x \in \mathbb{R}$. On considère le sous ensemble $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}$ défini par

$$\mathcal{B} = \{ x \in \mathbb{R} : \quad [x^2+2x] = 1 \}.$$

- Donner la définition de la partie entière de $x \in \mathbb{R}$.
- Mettre $\mathcal{B}$ sous la forme d'un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$.
- Déterminer la borne supérieure, la borne inférieure, le maximum et le minimum de $\mathcal{B}$.

Exercice 4 (04 pts). Déterminer la forme algébrique des solutions de l'équation

$$z^2+z+\frac{1+i}{4}=0.$$

Exercice 5 (04 pts).

- Pour $x, a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, calculer $(e^{ix}+ae^{-ix})^n$.
- Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, déduire la linéarisation de $(\cos(x))^n$ et $(\sin(x))^n$.

M. Houbad, m.houbad@gmail.com, Tlemcen le 01 Décembre 2022

Université Abou Bekr Belkaid, 13000, Tlemcen, Algérie, www.univ-tlemcen.dz

ANALYSE I

Solution & Barème Du Contrôle Continue Du Premier Semestre

Durée: 01h30 – Coefficient: 40% – Usage des documents et d'outils du calculs est interdit

Exercice 1 (04 pts). Pour $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ premier on a $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$

- Pour $\sqrt{2}+\sqrt{3}$: On suppose que $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\alpha \in \mathbb{Q}$ ce qui donne $\sqrt{2}=\alpha-\sqrt{3}$ et donc $2=\alpha^2+3-2\alpha\sqrt{3}$. On remarque que $\alpha \neq 0$, sinon obtient $2=3$ ce qui est contradictoire, alors $\sqrt{3}=(\alpha^2+1)/(2\alpha) \in \mathbb{Q}$, d'où la contradiction car 3 est premier. Donc $\sqrt{2}+\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$. $\longleftarrow$ $\boxed{01.00 \text{ pt}}$
- Pour $\sqrt[3]{2}+\sqrt{2}$: On suppose que $\sqrt[3]{2}+\sqrt{2}=\alpha \in \mathbb{Q}$ ce qui donne $2=(\alpha-\sqrt{2})^3$ et donc

$$2=\alpha^3-3\alpha^2\sqrt{2}+6\alpha-2\sqrt{2} \Longrightarrow \sqrt{2}=\frac{\alpha^3+6\alpha-2}{(3\alpha^2+2)} \in \mathbb{Q},$$

  d'où la contradiction car 2 est premier, donc $\sqrt[3]{2}+\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. $\longleftarrow$ $\boxed{01.50 \text{ pt}}$
- Pour $\sqrt{2}/(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3})$: On suppose que $\sqrt{2}/(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3})=\alpha \in \mathbb{Q}$, ce qui donne $\sqrt{2}(1-\alpha)=\alpha\sqrt[3]{3}$ et donc $2\sqrt{2}(1-\alpha)^3=3\alpha^3$. Le rationnel α ne peut être égale à un, sinon on obtient $0=3$ ce qui est contradictoire, d'où

$$\sqrt{2}=\frac{3\alpha^3}{2(1-\alpha)^3} \in \mathbb{Q}.$$

  ce qui est contradictoire car 2 est premier, alors $\sqrt{2}/(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}) \notin \mathbb{Q}$. $\longleftarrow$ $\boxed{01.50 \text{ pt}}$

Exercice 2 (04 pts). Le sous ensemble $\mathcal{A}$ est défini par

$$\mathcal{A}=\left\{x \in \mathbb{R}_+ : \quad \frac{x^4}{x^2+1}<2\right\}.$$

- Détermination du Sup($\mathcal{A}$) en utilisant la caractérisation de la borne supérieure.
  - La forme explicite de l'ensemble $\mathcal{A}$:

$$\begin{aligned}
x \in \mathcal{A} &\Longleftrightarrow x \in \mathbb{R}_+ : \quad \frac{x^4}{x^2+1}<2\\
&\Longleftrightarrow x \in \mathbb{R}_+ : \quad x^4-2x^2<2\\
&\Longleftrightarrow x \in \mathbb{R}_+ : \quad x^4-2x^2+1<3\\
&\Longleftrightarrow x \in \mathbb{R}_+ : \quad (x^2-1)^2<3\\
&\Longleftrightarrow x \in \mathbb{R}_+ : \quad -\sqrt{3}<x^2-1<\sqrt{3}\\
&\Longleftrightarrow x \in \mathbb{R}_+ : \quad 1-\sqrt{3}<x^2<1+\sqrt{3} \qquad \longleftarrow \boxed{00.50 \text{ pt}}\\
&\Longleftrightarrow 0 \leq x < \sqrt{1+\sqrt{3}}\,.
\end{aligned}$$

  donc

$$\mathcal{A}=\left[0;\sqrt{1+\sqrt{3}}\right[. \qquad \longleftarrow \boxed{00.50 \text{ pt}}$$

– Détermination de la borne supérieure de $\mathcal{A}$: On va montrer que $\mathrm{Sup}(\mathcal{A}) = \sqrt{1+\sqrt{3}}$. $\longleftarrow$ $\boxed{00.50 \text{ pt}}$
Autrement dit, il s'agit de montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists x_0 \in \mathcal{A} : \quad \sqrt{1+\sqrt{3}} - \varepsilon < x_0. \quad \longleftarrow \boxed{00.\ 50\text{pt}} \tag{1}$$

* Dans le cas où $\varepsilon \geq \sqrt{1+\sqrt{3}}$: Dans ce cas on obtient $\sqrt{1+\sqrt{3}} - \varepsilon \leq 0$. Vue que $1 \in \mathcal{A}$, alors pour assurer la condition (1) il suffit de prendre $x_0 = 1$. $\longleftarrow$ $\boxed{00.50 \text{ pt}}$
* Dans le cas où $\varepsilon \in]0; \sqrt{1+\sqrt{3}}\,[$: On obtient $0 < \sqrt{1+\sqrt{3}} - \varepsilon < \sqrt{1+\sqrt{3}}$. On remarque que $]\sqrt{1+\sqrt{3}} - \varepsilon; \sqrt{1+\sqrt{3}}\,[\subset \mathcal{A}$, donc pour assurer (1) il suffit de prendre $x_0 \in]\sqrt{1+\sqrt{3}} - \varepsilon; \sqrt{1+\sqrt{3}}\,[$, par example $x_0 = \sqrt{1+\sqrt{3}} - \varepsilon/2$. $\longleftarrow$ $\boxed{00.50 \text{ pt}}$

- L'élément maximale de l'ensemble $\mathcal{A}$: On a $\underbrace{\mathrm{Sup}(\mathcal{A}) = \sqrt{1+\sqrt{3}} \notin \mathcal{A}}_{\boxed{00.05 \text{ pt}}}$ donc $\underbrace{\mathrm{Max}(\mathcal{A}) \text{ n'existe pas}}_{\boxed{00.05 \text{ pt}}}$.

Exercice 3 (04 pts). Le sous ensemble $\mathcal{B}$ est défini par

$$\mathcal{B} = \{\, x \in \mathbb{R} : \quad [x^2 + 2x] = 1 \,\}.$$

- La définition de la partie entière : La partie entière de $x \in \mathbb{R}$ est l'unique élément de $\mathbb{Z}$ entier noté $[x]$ qui vérifier

$$[x] \leq x < [x] + 1. \quad \longleftarrow \boxed{00.50 \text{ pt}}$$

- Forme explicite de l'ensemble $\mathcal{B}$:

$$\begin{aligned}
x \in \mathcal{B} &\iff x \in \mathbb{R} : \quad [x^2 + 2x] = 1 \\
&\iff x \in \mathbb{R} : \quad 1 \leq x^2 + 2x < 2 \quad \longleftarrow \boxed{00.50 \text{ pt}} \\
&\iff x \in \mathbb{R} : \quad x^2 + 2x \geq 1 \quad \wedge \quad x^2 + 2x < 2 \\
&\iff x \in \mathbb{R} : \quad x^2 + 2x + 1 \geq 2 \quad \wedge \quad x^2 + 2x + 1 < 3 \\
&\iff x \in \mathbb{R} : \quad (x+1)^2 \geq 2 \quad \wedge \quad (x+1)^2 < 3 \\
&\iff x \in \mathbb{R} : \quad \begin{cases} x + 1 \in]-\infty; -\sqrt{2}\,] \cup [+\sqrt{2}\,; +\infty[\quad \longleftarrow \boxed{00.25 \text{ pt}} \\ x + 1 \in]-\sqrt{3}\,; +\sqrt{3}\,[\quad \longleftarrow \boxed{00.25 \text{ pt}} \end{cases} \\
&\iff x \in \mathbb{R} : \quad x + 1 \in \Big( ]-\infty; -\sqrt{2}\,] \cup [+\sqrt{2}\,; +\infty[\Big) \cap \,]-\sqrt{3}\,; +\sqrt{3}\,[,
\end{aligned}$$

donc $x + 1 \in]-\sqrt{3}\,; -\sqrt{2}\,] \cup [+\sqrt{2}\,; +\sqrt{3}\,[$ et donc $x \in]-1-\sqrt{3}\,; -1-\sqrt{2}\,] \cup [-1+\sqrt{2}\,; -1+\sqrt{3}\,[$. Alors

$$\mathcal{B} =]-1-\sqrt{3}\,; -1-\sqrt{2}\,] \cup [-1+\sqrt{2}\,; -1+\sqrt{3}\,[. \quad \longleftarrow \boxed{00.50 \text{ pt}}$$

- Détermination de la borne supérieure, la borne inférieure, le maximum et le minimum de $\mathcal{B}$.

	Inf	Sup	Min	Max
$\mathcal{B}$	$-1-\sqrt{3}$	$-1+\sqrt{3}$	$\nexists$	$\nexists$
Note	00.50 pt	00.50 pt	00.50 pt	00.50 pt

Exercice 4 (04 pts). Détermination de la forme algébrique des solutions de l'équation $z^2 + z + (1+i)/4 = 0$. On a

$$\begin{aligned}
z^2 + z + \frac{1+i}{4} = 0 &\iff z^2 + 2\frac{1}{2}z = -\frac{1+i}{4} \\
&\iff z^2 + 2\frac{1}{2}z + \frac{1}{4} = -\frac{1+i}{4} + \frac{1}{4}, \\
&\iff \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{i}{4}
\end{aligned}$$

on utilise le fait que $i = e^{i(\pi/2+2\pi k)}$, avec $k \in \mathbb{Z}$, on obtient

$$
\begin{aligned}
z^2 + z + \frac{1+i}{4} = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \left(z+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(-1)e^{i(\pi/2+2\pi k)}, \quad k \in \mathbb{Z} \qquad \longleftarrow \boxed{01{,}00 \text{ pt}} \\
&\Longleftrightarrow \quad z + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} i e^{i(\pi/4+\pi k)} \quad k \in \{0; 1\} \qquad \longleftarrow \boxed{01{,}00 \text{ pt}} \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} z = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} i e^{i\pi/4}, & \longleftarrow \boxed{00{,}50 \text{ pt}} \\ \text{ou} & \\ z = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} i e^{i5\pi/4}. & \longleftarrow \boxed{00{,}50 \text{ pt}} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Or

$$
e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta, \quad \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2},
$$

donc

$$
\begin{cases} z = \left(-\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{4}\right) + i\dfrac{\sqrt{2}}{4}, & \longleftarrow \boxed{00{,}50 \text{ pt}} \\ \text{ou} & \\ z = \left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{4}\right) - i\dfrac{\sqrt{2}}{4}. & \longleftarrow \boxed{00{,}50 \text{ pt}} \end{cases}
$$

Exercice 5 (04 pts).

- Pour $x, a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, le calcul de $(e^{ix} + ae^{-ix})^n$ ce fait par la formule du binôme de Newton :

$$
\begin{aligned}
(e^{ix} + ae^{-ix})^n &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k e^{ikx} e^{-i(n-k)x} a^{n-k} \qquad \longleftarrow \boxed{00{,}50 \text{ pt}} \\
&= \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} e^{i(2k-n)x} \qquad \longleftarrow \boxed{00{,}50 \text{ pt}} \\
\boxed{00.50 \text{ pt}} \longrightarrow \quad &= \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} \cos\left((2k-n)x\right)\right) + i\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} \sin\left((2k-n)x\right)\right).
\end{aligned} \tag{2}
$$

- Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on donne la linéarisation de $(\cos(x))^n$ et $(\sin(x))^n$.
  - La linéarisation de $(\cos(x))^n$: On pose $a = 1$, la relation (2) donne

$$
\boxed{00.50 \text{ pt}} \longrightarrow \underbrace{(e^{ix} + e^{-ix})^n}_{(2\cos(x))^n} = \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos\left((2k-n)x\right)\right) + i\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k \sin\left((2k-n)x\right)\right),
$$

par identification on obtient :

$$
\cos(x)^n = \frac{1}{2^n}\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos\left((2k-n)x\right)\right). \qquad \longleftarrow \boxed{00.50 \text{ pt}}
$$

  - La linéarisation de $(\sin(x))^n$: On pose $a = -1$, la relation (2) donne

$$
\begin{aligned}
\boxed{00.50 \text{ pt}} \longrightarrow \underbrace{(e^{ix} - e^{-ix})^n}_{(2i\sin(x))^n} &= \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^{2k-n} \cos\left((2k-n)x\right)\right) + \\
& \quad i\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^{2k-n} \sin\left((2k-n)x\right)\right).
\end{aligned} \tag{3}
$$

* Si $n = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}$: On obtient $i^n = (-1)^p$, ceci avec la relation (3) conduit à

$$\boxed{00.25 \text{ pt}} \longrightarrow 2^{2p}(-1)^p \sin(x)^{2p} = \left(\sum_{k=0}^{2p} C_{2p}^k (-1)^{2k-2p} \cos\big((2k-2p)x\big)\right) + i\left(\sum_{k=0}^{2p} C_{2p}^k (-1)^{2k-2p} \sin\big((2k-2p)x\big)\right),$$

par identification on récupère

$$\boxed{00.25 \text{ pt}} \longrightarrow \sin(x)^{2p} = \frac{1}{(-1)^p 2^{2p}}\left(\sum_{k=0}^{2p} C_{2p}^k (-1)^{2k-2p} \cos\big((2k-2p)x\big)\right)$$

* Si $n = 2p+1$ avec $p \in \mathbb{N}$: On obtient $i^n = (-1)^p i$, ceci avec la relation (3) conduit à

$$\boxed{00.25 \text{ pt}} \longrightarrow 2^{2p+1}(-1)^p i \sin(x)^{2p+1} = \left(\sum_{k=0}^{2p+1} C_{2p+1}^k (-1)^{2k-2p-1} \cos\big((2k-2p-1)x\big)\right) + i\left(\sum_{k=0}^{2p+1} C_{2p+1}^k (-1)^{2k-2p-1} \sin\big((2k-2p-1)x\big)\right),$$

par identification on récupère

$$\boxed{00.25 \text{ pt}} \longrightarrow \sin(x)^{2p+1} = \frac{1}{(-1)^p 2^{2p+1}} \sum_{k=0}^{2p+1} C_{2p+1}^k (-1)^{2k-2p-1} \sin\big((2k-2p-1)x\big).$$