الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Université Abou Bekr Belkaid
Tlemcen Algérie

جامعة آبي بكر بلقايد
تلمسان الجزائر

Faculté des sciences – Département de mathématiques.

Module : Algèbre 1 / Contrôle continu. (Remplacement)

1ère Année * MI * 2022-2023. (Durée : 1H30 mn).

N.B. L'USAGE DES APPAREILLES ÉLECTRONIQUES EST STRICTEMENT INTERDIT.

EXERCICE 01 : **(14 POINTS)**

(1) **(2 POINTS)** Sans l'utilisation de la table de vérité dire si cette proposition est vraie ou fausse ?
$[((A \Rightarrow B) \wedge C) \wedge ((A \wedge \bar{B}) \vee \bar{C})] \Rightarrow [\bar{C} \Leftrightarrow A]$.

(2) **(4 POINTS)** Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier votre réponse.

$$(A) : \forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}^*, 4x - 3n \leq -5.$$

$$(B) : \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2 - yx - 1} > y.$$

(3) **(4 POINTS)** Montrer par l'absurde que :

a) Si p est premier alors $\sqrt{p}$ est un nombre irrationnel.

b) Déduire que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est un nombre irrationnel.

(4) **(4 POINTS)** Montrer que :

$$[\boldsymbol{B \subset A \subset C \Leftrightarrow A \cup B = A \cap C}].$$

EXERCICE 02 : **(06 POINTS)** Soit f définie par :

$$f : E \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2-4}}\ .$$

(1) **(0.75 point)** Trouver E pour que f soit une application (N'oubliez pas d'écrire la définition d'une application).

(2) (2 points) Calculer la dérivée et tracer le tableau des variations de la fonction f.

(3) (1.5 point) f est-elle injective ? Surjective ? Justifier. (N'oubliez pas d'écrire les deux définitions d'une application injective et une application surjective).

(4) (0.75 point) Soit g une application définie par :

$$g : H \to K$$

$$x \mapsto g(x) = \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2-4}}\ .$$

Donner un cas (des intervalles $H\ et\ K$) à partir du tableau des variations où g est bijective (Justifier votre réponse).

(5) **(1 point)** Trouver dans ce cas l'application inverse.

BON COURAGE

Université Aboubekr Belkaid-Tlemcen
Module: Algèbre 1 Contrôle continu (remplacement) " Le corrigé".
1ère Année MI 2022-2023.

Question 01 : (3 points) Sans l'utilisation de la table de vérité dire si cette proposition est vraie ou fausse?
$$\left[((A \Rightarrow B) \wedge C) \wedge \left(\left(A \wedge \overline{B}\right) \vee \overline{C}\right)\right] \Rightarrow \left(\overline{C} \Leftrightarrow A\right).$$
Sachant que :
$$\begin{aligned} \overline{((A \Rightarrow B) \wedge C)} &\Leftrightarrow \overline{(A \Rightarrow B)} \vee \overline{C} \\ &\Leftrightarrow \left(A \wedge \overline{B}\right) \vee \overline{C}. \end{aligned}$$
Alors le premier membre de l'imlication :
$$\left[((A \Rightarrow B) \wedge C) \wedge \left(\left(A \wedge \overline{B}\right) \vee \overline{C}\right)\right],$$
est toujours faux car on a la proposition et leure négation avec un et entre eux, ce qui implique que l'implication est vraie quelque soit le second membre.

Question 02 : (4 points) Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier vos réponses.
$$(A) : \forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}^*, 4x - 3n \leq -5.$$
$$4x - 3n \leq -5 \Leftrightarrow 4x + 5 \leq 3n \Leftrightarrow n \geq \frac{4x+5}{3}.$$ **(0.5 point)**

1er cas : Si $\frac{4x+5}{3} \leq 0$, alors il suffit de prendre : $n = 0$. **(1 point)**
2ème cas : Si $\frac{4x+5}{3} > 0$, alors il suffit de prendre : $n = E\left(\frac{4x+5}{3}\right) + 1$ **(1 point)**
$$(B) : \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2 - yx - 1} > y.$$
Pour le domaine de définition de l'inégalité :
$$x^2 - yx - 1 = 0 \Rightarrow \triangle = y^2 + 4 > 0,$$
ce qui implique que :

$x^2 - yx - 1$ change le signe, alors pour $y = 0$ et $x = 0$, **(1 point)**

la proposition n'est pas définie donc elle est fausse.**(0.5 point)**

uestion 03 : (1.5 point + 1.5 point)

(a) Si p est premier alors $\sqrt{p}$ est un nombre irrationnel.

On suppose par l'absurde que : $\sqrt{p}$ est un nombre rationnel, donc :

$$\begin{aligned}
\exists a, b \quad &\in \quad \mathbb{N}^*, (a \wedge b) = 1 \text{ et } \sqrt{p} = \frac{a}{b} \Rightarrow p = \left(\frac{a}{b}\right)^2, \\
&\Rightarrow \quad pb^2 = a^2 \Rightarrow p \text{ divise } a^2 = a \times a, \\
&\Rightarrow \quad p \text{ divise } a \text{ car } p \text{ premier}, \\
&\Rightarrow \quad a = kp, k \in \mathbb{N}, \\
&\Rightarrow \quad b^2 = pk^2 \Rightarrow p \text{ divise } b^2, \text{ avec } p \text{ premier}, \\
&\Rightarrow \quad p \text{ divise } b, \\
&\Rightarrow \quad p \neq 1 \text{ est un diviseur commun de } a \text{ et } b, \text{ contradiction avec } (a \wedge b) = 1, \\
&\Rightarrow \quad \sqrt{p} \text{est un nombre irrationnel.}
\end{aligned}$$

(b) Supposons que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est rationnel, alors :

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \left[\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \times \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right] \in \mathbb{Q} \\
&\Rightarrow \quad \sqrt{2} - \sqrt{3} \in \mathbb{Q},
\end{aligned}$$

donc :

$$\underbrace{(\sqrt{2}+\sqrt{3})}_{\in\mathbb{Q}} + \underbrace{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}_{\in\mathbb{Q}} = 2\sqrt{2} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{2} \in \mathbb{Q},$$

(contradiction avec la dernière question).
Ce qui implique que : $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est irrationnel.

Question 04 : (4 points) Montrons que :

$$A \cup B = A \cap C \Leftrightarrow B \subset A \subset C.$$

" $\Rightarrow$ " **(2 points)** Montrons que :

$$A \cup B = A \cap C \Rightarrow B \subset A \subset C?$$

a) Montrons que: $B \subset A$?

$$\begin{aligned}
\text{Si} \quad &: \quad x \in B \text{ alors } x \in A \cup B, \\
&\Rightarrow \quad x \in A \cap C \text{ d'après l'hypothèse}, \\
&\Rightarrow \quad x \in A \Rightarrow B \subset A.
\end{aligned}$$

b) Montrons que: $A \subset C$?

$$\begin{aligned}
\text{Si } x \quad &\in \quad A \text{ alors } x \in A \cup B, \\
&\Rightarrow \quad x \in A \cap C \Rightarrow \ x \in C \Rightarrow A \subset C, \\
&\Rightarrow \quad B \subset A \subset C.
\end{aligned}$$

" $\Leftarrow$ " **(2 points)** Montrons que :

$$B \subset A \subset C \Rightarrow A \cup B = A \cap C?$$

a) Montrons que : $A \cup B \subset A \cap C$?

$$\text{Si} \quad : \quad x \in A \cup B \text{ alors : } \begin{cases} x \in A \Rightarrow x \in C, \text{l'hypothèse} \\ \text{ou } x \in B \Rightarrow x \in A \Rightarrow x \in C \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad x \in A \cap C.$$

1. b) Montrons que : $A \cap C \subset A \cup B$?

$$x \in A \cap C \Rightarrow \; x \in A \Rightarrow x \in A \cup B \Rightarrow A \cap C \subset A \cup B.$$

Exercice 02 : (6 points) Soit la fonction f définie par :

$$\begin{array}{rcl} f & : & E \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x^2+1}{\sqrt{x^2-4}}. \end{array}$$

(1) Trouver E pour que f soit une application.

f est une application si et seulement si :

$$\forall x \in E, \exists! y \in \mathbb{R} \text{ tel que : } f(x) = y. \; \textbf{(0.25 point)}$$

$$\begin{aligned} D_f &= \left\{ x \in \mathbb{R} / x^2 - 4 > 0 \right\}. \\ x^2 - 4 &= 0 \Leftrightarrow x = -2 \text{ ou } x = 2. \\ & \quad -\infty \quad + \quad -2 \quad - \quad 2 \quad + \quad +\infty \\ D_f &= \left]-\infty, -2\right[\cup \left]2, +\infty\right[. \end{aligned}$$

Pour que f soit une application il suffit que :

$$E = D_f = \left]-\infty, -2\right[\cup \left]2, +\infty\right[. \textbf{(0.5 point)}$$

(2) Calculer la dérivée et tracer le tableau des variations de la fonction f.

Les limites : **(1 point)**

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2-4}} &= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{|x| \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}} \\ &= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{-x\sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}} = +\infty. \\ \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2-4}} &= +\infty. \\ \lim_{x \overset{<}{\to} -2} \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2-4}} &= \frac{5}{0^+} = +\infty. \\ \lim_{x \overset{>}{\to} 2} \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2-4}} &= \frac{5}{0^+} = +\infty. \end{aligned}$$

La dérivée :

$$f'(x) = \frac{2x\sqrt{x^2-4} - \frac{(2x)\left(x^2+1\right)}{2\sqrt{x^2-4}}}{(x^2-4)} = \frac{2x\sqrt{x^2-4} - \frac{(x)\left(x^2+1\right)}{\sqrt{x^2-4}}}{(x^2-4)}$$

$$= \frac{2x\left(x^2-4\right) - x^3 - x}{(x^2-4)\sqrt{x^2-4}}$$

$$= \frac{x^3-9x}{(x^2-4)\sqrt{x^2-4}} = \frac{x\left(x^2-9\right)}{(x^2-4)\sqrt{x^2-4}}.\textbf{(0.5 point)}$$

$-\infty \quad - \quad -2$———$1 \quad - \quad 4 \quad + \quad +\infty$ **(0.5 point)**

x	$-\infty$ $\quad$ -3	0	3 $\quad$ $+\infty$
x^2-9	$+$	$-$	$-$ $\quad$ $+$
$x\left(x^2-9\right)$	$-$	$+$	$-$ $\quad$ $+$

(0.5 point)

x	$-\infty$ $\quad$ -3 $\quad$ -2	******	2 $\quad$ 3 $\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$ $\quad$ $+$	******	$-$ $\quad$ $+$
$f(x)$	$+\infty$ $\searrow$ $f(-3)=\frac{10}{\sqrt{5}}$ $\nearrow$ $+\infty$	****** ****** ******	$+\infty$ $\searrow$ $f(3)=\frac{10}{\sqrt{5}}$ $\nearrow$ $+\infty$

(1.5 point)

(2) f est-elle injective? surjective ? Justifier.

a) Pour l'injectivité :

f est injective si et seulement si :

$$\forall x_1, x_2 \in \left]-\infty,-2\right[\cup \left]2,+\infty\right[, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).\textbf{(0.25 point)}$$

Il existent deux éléments différents :

$$x_1 \in \left]2,3\right[\text{ et } x_2 \in \left]3,+\infty\right[\text{ avec } x_1 \neq x_2 \text{ et } f(x_1) = f(x_2).\textbf{(0.5 point)}$$

Donc f n'est pas injective.

b) Pour la surjectivité :

f est surjective si et seulement si :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \left]-\infty,-2\right[\cup \left]2,+\infty\right[\text{ tel que : } f(x) = y.\textbf{(0.25 point)}$$

Alors d'après le tableau des variations :

$$f\left(\left]-\infty,-2\right[\cup \left]2,+\infty\right[\right) = f\left(\left]-\infty,-2\right[\right) \cup f\left(\left]2,+\infty\right[\right) = \left[\frac{10}{\sqrt{5}},+\infty\right[,$$

donc elle n'est pas surjective sur $\mathbb{R}$ car :

$$\exists y = 0, \forall x \in \left]-\infty,-2\right[\cup \left]2,+\infty\right[\text{ tel que : } f(x) \neq 0.\textbf{(0.5 point)}$$

(3) (0.5+0.5 point) Trouver un cas (les plus grands intervalles) d'après le tableau des variations où elle est injective et surjective.

$$\begin{aligned} g &: \left]-\infty,-3\right] \to \left[\frac{10}{\sqrt{5}},+\infty\right[\\ x &\mapsto g(x)=\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2-4}}. \end{aligned}$$

car la fonction est continue et strictement décroissante donc elle est injective et surjective car $g\left(\left]-\infty,-3\right]\right)=\left[\frac{10}{\sqrt{5}},+\infty\right[$, donc bijective.

(4) (1point) Trouver g^{-1} dans l'un des deux cas.

$$\begin{aligned} y &= \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2-4}} \Rightarrow y^2=\frac{\left(x^2+1\right)^2}{x^2-4} \\ &\Rightarrow \left(x^2-4\right)y^2=x^4+2x^2+1 \Rightarrow x^4+\left(2-y^2\right)x^2+4y^2+1=0 \end{aligned}$$

On pose : $X=x^2$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow X^2+\left(2-y^2\right)X+4y^2+1=0 \\ &\Rightarrow \triangle=\left(2-y^2\right)^2-4\left(4y^2+1\right) \\ &= 4-8y^2+y^4-16y^2-4 \\ &= y^4-24y^2=y^2\left(y^2-24\right)>0 \text{ si } y\in\left[\frac{10}{\sqrt{5}},+\infty\right[\\ &\Rightarrow X_1=\frac{y^2-2-\sqrt{\triangle}}{2}\leq -3 \text{ ou } X_2=\frac{y^2-2+\sqrt{\triangle}}{2} \\ &\Rightarrow x_1=-\sqrt{X_1}, x_2=\sqrt{X_1}, x_3=-\sqrt{X_2} \text{ et } x_4=\sqrt{X_2}. \end{aligned}$$

Alors dans ce cas on prend $x_1<-3$ ce qui implique que :

$$\begin{aligned} g^{-1} &: \left[\frac{10}{\sqrt{5}},+\infty\right[\to \left]-\infty,-3\right] \\ y &\mapsto g^{-1}(y)=-\sqrt{\frac{y^2-2-\sqrt{y^2\left(y^2-24\right)}}{2}}. \end{aligned}$$