UNIVERSITE ABOUBEKR BELKAID
TLEMCEN
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

جامعة أبو بكر بلقايد تلمسان
كلية العلوم
قسم الرياضيات

Epreuve de synthèse en Processus Stochastique

1er février 2022

Exercice 1 *Soit $0 < p < 1$, on modélise un processus de vie et de mort fini par une chaîne de Markov à valeurs dans $0, ..., N$. Quand il n'y a pas d'individus, il s'en crée un avec une probabilité p, quand il y en a N l'un d'eux meurt avec la probabilité $1-p$. Quand il y en a $k,\ 0 \leq k \leq N$, il y a une naissance avec une probabilité p et une mort avec une probabilité $1-p$.*
1) Dessiner le diagramme de la chaîne.
2) Déterminer sa matrice de transition.
3) Démontrer que la chaîne admet une loi stationnaire unique, déterminer la.
4) Quel est le comportement de la chaîne pour p très petit, très proche de 1 et $p = \frac{1}{2}$.

Exercice 2 *On considère un processus de branchement X_n tel que $\mu = \acute{\Phi}(1) = 1$ et $\acute{\acute{\Phi}}(1)$ existe, Φ la fonction génératrice de Z le nombre de descendants . Soit $\tau = \inf\{n \geq 0,\ X_n = 0\}$ le temps d'extinction.*
1) Montrer que τ est presque sûrement fini.
2) Soit $\Phi_n(t)$ la fonction génératrice de X_n, on pose $u_n = \mathbf{P}\{\tau > n\}$, écrire u_n en fonction de $\Phi_n(0)$, en déduire une relation de récurrence sur la suite $(u_n)_n$.(Indication : utiliser la propriété $\Phi_n(t) = \Phi^{(n)}(t)$ la composition n fois de Φ avec elle même)
3) calculer $\lim_{n\to\infty} u_n$, en déduire un développement limité d'ordre 2 dans la relation de récurrence.
4) Montrer que $\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} \sim \frac{\acute{\acute{\Phi}}(1)}{2}$.
5) On en déduit que $u_n \sim \frac{2}{n\acute{\acute{\Phi}}(1)}$, montrer que $\mathbf{E}\left(\tau\right) = +\infty$.

Exercice 3 *Sachant que les clients arrivent suivant un processus de Poisson de paramètre λ, on souhaite comparer les trois architectures de files d'attente suivantes :*
A : consiste à utiliser un serveur de capacité 2μ.
B : consiste à utiliser deux serveurs en parallèle de capacité μ, ces serveurs partagent la

même file d'attente.
C : consiste à utiliser deux serveurs de capacité μ en parallèle, mais chaque serveur a sa propre file.
a) Pour chacune des trois configurations donner :
1) La condition de stabilité.
2) Le nombre moyen de clients dans le système.
3) Le temps moyen de réponse.(temps de moyen de séjour)
b) Quelle est la meilleure configuration ?

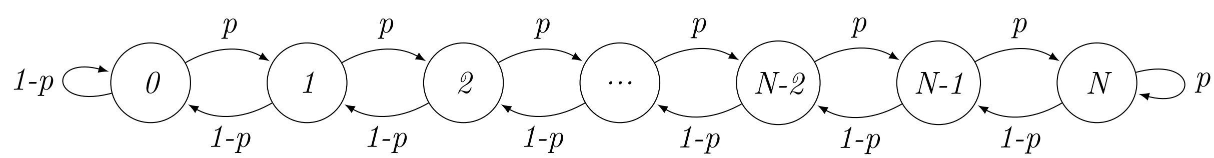
UNIVERSITE ABOUBEKR BELKAID
TLEMCEN
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

جامعة أبو بكر بلقايد تلمسان
كلية العلوم
قسم الرياضيات

Corrigé de l'epreuve de synthèse en Processus Stochastique

4 février 2022

Exercice 1 *1) le graphe*



(1 pt)
2) la matrice de transition $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 1-p & p & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1-p & 0 & p & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & .. & .. & \dots & .. \\ \dots & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1-p & 0 & p \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1-p & p \end{pmatrix}$$

(2 pt)
3)la chaine est irréductible (0.5 pt), récurrente positive (0.5 pt)et apériodique (0.5 pt) alors elle admet une loi stationnaire unique (0.5 pt) .
Soit la loi stationnaire Π*, Pour la déterminer on applique* $\Pi = \Pi\mathcal{P}$ *on a :*
$\Pi(0) = (1-p)\Pi(0) + (1-p)\Pi(1)$ *d'où* $\Pi(1) = \frac{p}{1-p}\Pi(0)$
$\Pi(2) = p\Pi(1) + (1-p)\Pi(3)$ *alors* $\Pi(k) = p\Pi(k-1) + (1-p)\Pi(k+1)$
et $\Pi(N) = p\Pi(N-1) + p\Pi(N)$
Alors on a la relation de récurrence suivante :
$\Pi(k) = \left(\frac{p}{1-p}\right)^k \Pi(0)$ *pour* $0 \leq k \leq N$*. (2 pts)*

en utilisant $\sum_{k=0}^{N}\Pi(k)=1$ *d'où* $\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{p}{1-p}\right)^{k}\Pi(0)=1.$

$\Pi(0)=\frac{1-\frac{p}{1-p}}{1-\left(\frac{p}{1-p}\right)^{(N+1)}}$. *(0.5pt)*

*4) *Pour p très petit,* $\frac{p}{1-p}\sim p$ *alors* $\Pi(1)$*est trés petit par rapport à* $\Pi(0)$, *donc la chaîne reste essentiellement en 0. (0.5 pt)*

**Pour p proche de 1,* $\frac{p}{1-p}$ *est très grand, alors la chaîne atteint l'état N presque tout le temps. (0.5 pt)*

**Pour p proche de* $\frac{1}{2}$, $\frac{p}{1-p}$ *est proche de 1, donc la distribution est proche de la distribution uniforme. (0.5 pt)*

Exercice 2 *1)* μ *le nombre moyen de descendants,* $\mu=1$ *alors extinction de la population, donc* τ *est presque sûrement fini. (1 pt)*

2) $u_n=\mathbf{P}(\tau>n)=\mathbf{P}(X_n\neq 0)=1-\mathbf{P}(X_n=0)=1-\Phi_n(0)$.

$u_{n+1}=1-\Phi_{n+1}(0)=1-\Phi_n(\Phi(0))=1-\Phi^{(n)}(\Phi(0))=1-\Phi(\Phi^{(n)}(0))$.

d'où $u_{n+1}=1-\Phi(1-u_n)$. *(1pt)*

3) $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\{\tau>n\}=0$, *car* τ *est presque sûrement fini. (1pt)*

$u_{n+1}=1-[\Phi(1)-\acute{\Phi}(1)u_n+\frac{\acute{\acute{\Phi}}(1)}{2}u_n^2+o(u_n^2)]$. *D'où*

$u_{n+1}=1-[1-u_n+\frac{\acute{\acute{\Phi}}(1)}{2}u_n^2+o(u_n^2)]$. *Alors*

$u_{n+1}=u_n+\frac{\acute{\acute{\Phi}}(1)}{2}u_n^2+o(u_n^2)$. *(1pt)*

4)$\frac{1}{u_{n+1}}-\frac{1}{u_n}=\frac{\frac{\acute{\acute{\Phi}}(1)}{2}u_n^2+o(u_n^2)}{u_n^2-\frac{\acute{\acute{\Phi}}(1)}{2}u_n^3+o(u_n^3)}$. *En simplifiant et en passant à la limite on obtient*

$\frac{1}{u_{n+1}}-\frac{1}{u_n}\sim\frac{\acute{\acute{\Phi}}(1)}{2}$. *(1pt)*

5) $\mathbb{E}(\tau)=\sum_{n\geq 1}\mathbb{P}(\tau>n)=\sum_{n\geq 1}u_n=+\infty$, *car* $(u_n\sim\frac{2}{n\acute{\acute{\Phi}}(1)})$. *(1pt)*

Exercice 3 *Pour A :*

1) la condition de stabilité est $\lambda<2\mu$. *(0.5pt)*

2) $L=\frac{\frac{\lambda}{2\mu}}{1-\frac{\lambda}{2\mu}}=\frac{\lambda}{2\mu-\lambda}$. *(0.5pt)*

3) $W=\frac{L}{\lambda}=\frac{1}{2\mu-\lambda}$. *(0.5pt)*

Pour B :

1) la condition ds stabilité $\frac{\lambda}{2}<\mu$. *(0.5pt)*

2) $L=\frac{\frac{\lambda}{2\mu}}{1-\frac{\lambda}{2\mu}}=\frac{\lambda}{2\mu-\lambda}$. *(0.5pt)*

3) $W=\frac{L}{\lambda}=\frac{1}{2\mu-\lambda}$. *(0.5pt)*

Pour C :

1) La condition de stabilité est $\lambda<2\mu$. *(0.5pt)*

2) $L=2\frac{\frac{\lambda}{2\mu}}{1-\frac{\lambda}{2\mu}}=2\frac{\lambda}{2\mu-\lambda}$. *(0.5pt)*

3) $W=\frac{L}{\lambda}=\frac{2}{2\mu-\lambda}$. *(0.5pt)*

b) le temps d'attente est le même pour les deux la configurations A et B, mais la capacité de service pour A est le double de celle dans B, alors la meilleure configuration est A. (0.5pt)