Université Abou Bekr Belkaid – Tlemcen.
Faculté des Sciences.
Département de Mathématiques.

Année Universitaire 2021/2022
$2^{\text{ère}}$ année Master.
Semestre 3.

Contrôle Continu "Statistiques des Processus".

Aucun document n'est autorisé.
Durée : 1h30mn.
05 Décembre 2021.

Exercice 1.

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d et centrées. Posons $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.
Supposons que $\forall n \geq 1, \exists c_n > 0/\ \ |X_n| \leqslant c_n$ et

$$\exists \alpha, \beta > 0/\ \forall n \geq 1,\ \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \leqslant n^{2\alpha-\beta}.$$

- Montrer, à l'aide de l'inégalité de Hoeffding, que $\dfrac{|S_n|}{n^\alpha} \longrightarrow 0$ p.s.
- ▶ Indication : $ln(n) = o(n^\beta)$

Exercice 2.

Soient $f \in \sum_d (\beta, L)$ et $X = (X_1, ..., X_n)$ un échantillon de v.a. de densité f. Pour tout $s < \lfloor\beta\rfloor$, on définit l'estimateur de $f^{(s)}$, la dérivée d'ordre s de f par :

$$\hat{f}_{n,s}(x) = \frac{1}{nh^{s+1}} \sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{X_i - x}{h}\right), x \in \mathbb{R} \ \ et\ \ h > 0$$

où K est une fonction telle que pour tout $j \in \{0, ..., \lfloor\beta\rfloor\} \setminus \{s\}$

$$\int u^j K(u)du = 0, \quad \int u^s K(u)du = s!, \quad \int \left|u^\beta\right| |K(u)|\, du < \infty$$
$$\|f\|_\infty < \infty \quad \text{et} \quad \|K\|_2 < \infty$$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe deux constantes C_B et C_V telles que pour tout $h > 0$, on a :
$$\begin{aligned} |Biais\left(\hat{f}_{n,s}(x)\right)| &\leqslant C_B h^{\beta-s}, \\ Var\left(\hat{f}_{n,s}(x)\right) &\leqslant \frac{C_V}{nh^{2s+1}} \end{aligned} .$$
2. Montrer que $MSE_{\hat{f}_{n,s}}(h,x) = \left(Biais\hat{f}_{n,s}(x)\right)^2 + Var\left(\hat{f}_{n,s}(x)\right)$, puis déduire par deux méthodes différentes que $MSE_{\hat{f}_{n,s}}(h,x) = O\left(n^{\frac{-2(\beta-s)}{2\beta+1}}\right)$. Interpréter le résultat.

Bonne courage.

Contrôle Continu "Statistique des Processus"

Exercice n°1 :

$(X_n)_{n\geq 1}$ v.a. i.i.d centrées. $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$

$\forall n \geq 1, \exists c_n > 0 / |X_n| \leq c_n$

$\exists \alpha, \beta > 0 / \forall n \geq 1, \sum_{i=1}^n c_i^2 \leq n^{2\alpha - \beta}$

D'après l'inégalité de Hoeffding : $\forall x > 0 : \mathbb{P}(|S_n| > x) \leq 2\exp\left(\frac{-x^2}{2\sum_{i=1}^n c_i^2}\right)$.

Soit $\varepsilon > 0$, pour $x = \varepsilon n^\alpha$, on a :

$$\mathbb{P}\left(\frac{|S_n|}{n^\alpha} > \varepsilon\right) \leq 2\exp\left(\frac{-\varepsilon^2 n^{2\alpha}}{2\sum_{i=1}^n c_i^2}\right)$$

$$\leq 2\exp\left(\frac{-\varepsilon^2 n^\beta}{2}\right).$$

. $\ln n = o(n^\beta)$ donc : $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta \in \mathbb{N} / \forall n \geq \eta, |\ln n / n^\beta| \leq \varepsilon$

Pour un ε bien choisit, on aura :

$$\exp\left(\frac{-\varepsilon^2 n^\beta}{2}\right) \leq 1/n^2.$$

et comme $\sum_{n\geq 1} \exp\left(\frac{-\varepsilon^2 n^\beta}{2}\right)$ est à terme positifs, d'après la règle de Riemann, $\sum_{n\geq 1} \exp\left(\frac{-\varepsilon^2 n^\beta}{2}\right) < \infty$

En utilisant le lemme de Borel-Cantelli :

$\mathbb{P}\left(\left\{\frac{|S_n|}{n^\alpha} > \varepsilon \text{ i.o}\right\}\right) = 0$ i.e. $\frac{|S_n|}{n^\alpha} \xrightarrow{p.s} 0$ c.q.f.d

Exercice n°2 :

1°/. $f \in \Sigma_d(\beta, L)$ c.à.d f est une densité et pour $\beta, L > 0$,

f est $\lfloor\beta\rfloor$-fois dérivable sur $\mathbb{R}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$:

$$|f^{\lfloor\beta\rfloor}(y) - f^{\lfloor\beta\rfloor}(x)| \leq L|x - y|^{\beta - \lfloor\beta\rfloor}$$

. Partie Biais :

$$|B(\hat{f}_{n,s}(x))| := |\mathbb{E}(\hat{f}_{n,s}(x)) - f^{(s)}(x)|$$

$$= \left|\mathbb{E}\left(\frac{1}{n h^{s+1}} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{X_i - x}{h}\right)\right) - f^{(s)}(x)\right|$$

$$= \left|\frac{1}{h^{s+1}} \int_{\mathbb{R}} K\left(\frac{u - x}{h}\right) f(u)\,du - f^{(s)}(x)\right|$$

$\langle v = \frac{u-x}{h}, du = h\,dv \rangle$ $= \left|\frac{1}{h^s} \int_{\mathbb{R}} K(v) f(x + hv)\,dv - f^{(s)}(x)\right|$

Formule de Taylor Lagrange : $\exists \xi \in]0,1[$ /

$$f(x + hv) = \sum_{k=0}^{\lfloor\beta\rfloor - 1} \frac{(hv)^k}{k!} f^{(k)}(x) + \frac{(hv)^{\lfloor\beta\rfloor}}{\lfloor\beta\rfloor!} f^{(\lfloor\beta\rfloor)}(x + \xi hv)$$

En utilisant : $\bullet \int u^j K(u)\,du = 0$, $\forall j \in \{0, \dots, \lfloor\beta\rfloor\} \setminus \{s\}$; $s < \lfloor\beta\rfloor - 1$

$\bullet \int u^s K(u)\,du = s!$, on obtient

$$|B(\hat{f}_{n,s}(x))| = \Big| \cancel{f^{(s)}(x)} + \frac{h^{\lfloor\beta\rfloor - s}}{\lfloor\beta\rfloor!} \int_{\mathbb{R}} K(v)\, v^{\lfloor\beta\rfloor} f^{(\lfloor\beta\rfloor)}(x + \tau h v)\, dv - \cancel{f^{(s)}(x)} \Big|$$

Comme $\int_{\mathbb{R}} K(v)\, v^{\lfloor\beta\rfloor}\, dv = 0$ alors $\frac{h^{\lfloor\beta\rfloor - s}}{\lfloor\beta\rfloor} \int_{\mathbb{R}} K(v)\, v^{\lfloor\beta\rfloor} f^{(\lfloor\beta\rfloor)}(x)\, dv = 0$

d'où :

$$|B(\hat{f}_{n,s}(x))| \leq \frac{h^{\lfloor\beta\rfloor - s}}{\lfloor\beta\rfloor!} \int_{\mathbb{R}} |K(v)|\, |v|^{\lfloor\beta\rfloor}\, |f^{(\lfloor\beta\rfloor)}(x + \tau h v) - f^{(\lfloor\beta\rfloor)}(x)|\, dv$$

$$\leq \frac{L\, h^{\lfloor\beta\rfloor - s}}{\lfloor\beta\rfloor!} \int_{\mathbb{R}} |K(v)|\, |v|^{\lfloor\beta\rfloor}\, |\tau h v|^{\beta - \lfloor\beta\rfloor}\, dv$$

$|\tau| < 1$ et $\beta - \lfloor\beta\rfloor > 0 \rightarrow \leq \frac{L\, h^{\beta - s}}{\lfloor\beta\rfloor} \int_{\mathbb{R}} |K(v)|\, |v|^{\lfloor\beta\rfloor}\, dv$

Par hyp : $\int_{\mathbb{R}} |v|^{\lfloor\beta\rfloor} |K(v)|\, dv < \infty$ donc en posant $C_\beta := \frac{L}{\lfloor\beta\rfloor} \int_{\mathbb{R}} |u|^{\lfloor\beta\rfloor} K(u)$

on a :

$$|\text{Biais}(f_n^{(s)}(x))| \leq C_\beta\, h^{\beta - s} \quad \text{c.q.f.d}$$

• <u>Partie variance</u> :

$$\text{Var}(\hat{f}_{n,s}(x)) = \frac{1}{n^2 h^{2(s+1)}} \sum_{i=1}^n \text{Var}\left(K\left(\frac{X_i - x}{h}\right)\right) \qquad ((X_i) \text{ indep i.i.d})$$

$$= \frac{1}{n\, h^{2(s+1)}} \text{Var}\left(K\left(\frac{X_1 - x}{h}\right)\right)$$

$$\leq \frac{1}{n\, h^{2(s+1)}} \mathbb{E}\left(K^2\left(\frac{X_1 - x}{h}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{n\, h^{2s+1}} \int_{\mathbb{R}} K(u) f(x + hu)\, du$$

$$\leq \frac{\|f\|_\infty \cdot \|K\|_2 =: C_V}{n\, h^{2s+1}} \quad \text{c.q.f.d.}$$

2)

$$\mathbb{E}\left[(\hat{f}_{n,s}(x) - f^{(s)}(x))^2\right] = \mathbb{E}\left[\left(\hat{f}_{n,s}(x) - f^{(s)}(x) + \mathbb{E}(\hat{f}_{n,s}(x)) - \mathbb{E}(\hat{f}_{n,s}(x))\right)^2\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\hat{f}_{n,s}(x) - \mathbb{E}(\hat{f}_{n,s}(x))\right]^2 + \mathbb{E}\left[\left(\mathbb{E}(\hat{f}_{n,s}(x)) - f^{(s)}(x)\right)^2\right] + 2\,\underbrace{\mathbb{E}\left[\left(f_{n,s}(x) - \mathbb{E}(f_{n,s}(x))\right)\left(\mathbb{E}(\hat{f}_{n,s}(x)) - f^{(s)}(x)\right)\right]}_{0}$$

$$= \text{Var}(\hat{f}_{n,s}(x)) + \text{Biais}^2$$

<u>Alors</u> :

$$MSE_{\hat{f}_{n,s}}(h,x) \leq C_\beta\, h^{\beta - s} + C_V \cdot \frac{1}{n\, h^{2s+1}} = \Psi(h)$$

On cherche à n fixé, la fenêtre h qui donne l'ordre minimal du terme de droite.

<u>1ère Méthode</u> : Comme $h \mapsto C_\beta^2 h^{2(\beta-s)}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ (puisque $s < \lfloor \beta \rfloor$) et $h \mapsto \frac{C_V}{n h^{2s+1}}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ (puisque $2s+1>0$ car $s \in \mathbb{N}$). On cherche la fenêtre h qui réalise un compromis entre le biais au carré et la variance i.e.

$$h^{2(\beta-s)} = \frac{1}{n h^{2s+1}} \quad \text{ou encore} \quad h^{2\beta+1} = n^{-1} \quad \text{(aux constantes près)}.$$

Donc : $h = n^{-\frac{1}{2\beta+1}}$

En injectant cette valeur dans $\Psi(h)$, on obtient

$$MSE_{\hat{f}_{n,s}}(x,h) \leq C\, n^{-\frac{2(\beta-s)}{2\beta+1}} \quad \text{i.e :}$$

$$MSE_{\hat{f}_{n,s}}(x,h) = O\left(n^{-\frac{2(\beta-s)}{2\beta+1}}\right) \quad \text{c.q.f.d}$$

<u>2ème Méthode</u> : $\Psi \in C^2(\mathbb{R}_+^*)$ et pour tout $h>0$:

$$\Psi'(h) = 2(\beta-s)C_\beta^2 h^{2(\beta-s)-1} - (2s+1)\frac{C_V}{n h^{2s+2}}.$$

$$\Psi''(h) = 2(\beta-s)(2(\beta-s)-1) C_\beta^2 h^{2(\beta-s)-2} + (2s+1)(2s+2)\frac{C_V}{n h^{2s+3}}$$

$$\Psi'(h) = 0 \iff h^* = \left(\frac{(2s+1)C_V}{2(\beta-s)C_\beta^2}\right)^{\frac{1}{2\beta+1}} n^{-\frac{1}{2\beta+1}}$$

* h^* est un point critique sur $\mathbb{R}_+^*$, on vérifie que $\Psi''(h^*)>0$ d'où h^* est un minimum local de Ψ sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme aussi c'est l'unique pt critique, donc c'est un minimum global.
* En conclusion, en prenant $h = h^*$, nous avons donc,

$$MSE_{\hat{f}_n}(h,x) \leq C\, n^{\frac{2(\beta-s)}{2\beta+1}} \quad \text{c.q.f.d}$$