UNIVERSITE ABOUBEKR BELKAID
TLEMCEN
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

جامعة أبو بكر بلقايد تلمسان
كلية العلوم
قسم الرياضيات

Contrôle continu en Processus Stochastique

8 décembre 2021

Exercice 1 *Soit X_n une chaîne de Markov, $E = \{1, 2, ...10\}$ de matrice de transition $\mathcal{P}$*

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.25 & 0 & 0.25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.75 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Représenter le graphe de cette chaîne.
2) Déterminer les classes de communication, leurs natures et leurs périodicité.
3) Calculer les probabilités d'absorption des états transitoires par les classes récurrentes.

Exercice 2 *On considère la propagation d'une information d'un individu 0 à un individu n. On note α la probabilité que l'information soit fausse à l'individu $k+1$ alors qu'elle était vraie en k. et β la probabilité qu'elle soit vraie en $k+1$ alors qu'elle était fausse en k.*
1) Modéliser l'état de l'information à l'aide d'une chaîne de Markov. et représenter son graphe.
2) Discuter suivant les valeurs de α et β l'existence de la loi stationnaire.
3) En déduire un moyen de calculer la probabilité que l'information soit encore vraie pour un nombre de pas tendant vers l'infini.

Exercice 3 *Soit un processus de naissance et de mort de loi de reproduction Z qui suit $B(3, 2/3)$, déterminer sa probabilité d'extinction.*

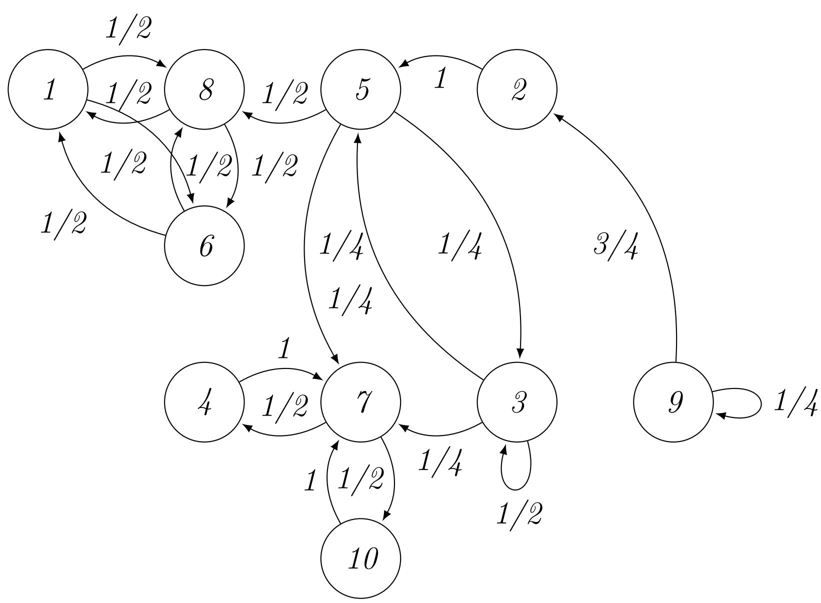
UNIVERSITE ABOUBEKR BELKAID
TLEMCEN
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

جامعة أبو بكر بلقايد تلمسان
كلية العلوم
قسم الرياضيات

Corrigé du contrôle continu en Processus Stochastique

5 janvier 2022

Exercice 1 (10.25 pts) *1)*



(2.5 pts)

2) $E_R = \{4,7,10\} \cup \{1,6,8\}$, $d(4) = d(7) = d(10) = 2$, $d(1) = d(6) = d(8) = 1$

$E_T = \{3,5\} \cup \{2\} \cup \{9\}$, $d(9) = d(3) = d(5) = 1$, 2 *n'a pas de période. (3.75 pts)*

3) Soit $C_1 = \{4,7,10\}$, *soit* $\phi_{C_1}(a)$ *la probabilité d'absorption de l'état* a *par* C_1.

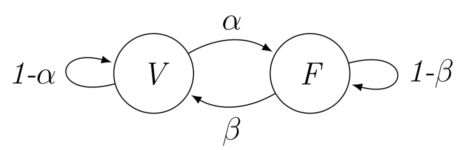
$$\left\{\begin{array}{l} \phi_{C_1}(2) = \phi_{C_1}(5) \\ \phi_{C_1}(3) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\phi_{C_1}(5) \\ \phi_{C_1}(5) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\phi_{C_1}(3) \\ \phi_{C_1}(9) = \phi_{C_1}(2); \end{array}\right. \quad \text{d'où } \phi_{C_1}(2) = \phi_{C_1}(5) = \phi_{C_1}(9) = \frac{3}{7},\ \phi_{C_1}(3) = \frac{5}{7}\ \textit{(2pts)}$$

Soit $C_2 = \{1,6,8\}$, *soit* $\phi_{C_2}(a)$ *la probabilité d'absorption de l'état* a *par* C_2.

$$\begin{cases} \phi_{C_2}(2) = \phi_{C_2}(5) \\ \phi_{C_2}(3) = \frac{1}{2}\phi_{C_2}(5) \\ \phi_{C_2}(5) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\phi_{C_2}(3) \\ \phi_{C_2}(9) = \frac{3}{4}\phi_{C_2}(2) + \frac{1}{4}\phi_{C_2}(9); \end{cases}$$ *d'où* $\phi_{C_2}(2) = \phi_{C_2}(5) = \phi_{C_2}(9) = \frac{4}{7},\ \phi_{C_2}(3) = \frac{2}{7}$. *(2pts)*

Exercice 2 (5pts) *1) l'information peut être modélisée par une chaîne à deux états vrai, faux ;*

$\begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$ *(0.5 pts)*



(0.5 pts)

Si $\alpha = \beta = 1$, *la chaîne est irréductible, récurrente positive de période 2, il ya une loi stationnaire* $\Pi = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. *(1 pt)*

Si $\alpha = \beta = 0$, *la chaine a deux classes absorbantes et admet une infinité de loi stationnaires.(1 pt)*

Si $0 < \alpha + \beta < 2$, *la chaîne est apériodique, récurrente positive, alors elle admet une loi stationnaire unique* $\Pi = \left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}, \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)$. *(1 pt)*

3)la loi stationnaire est $\Pi = \left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}, \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)$. *alors la probabilité que l'information soit encore vraie pour un nombre de pas tendant vers l'infini est* $\frac{\beta}{\alpha+\beta}$ *(1 pt)*

Exercice 3 (4.75 pts) $\mathbf{E}(Z) = 3 * (\frac{2}{3}) > 1$ *alors pas d'extinction. (0.5 pt)*

On écrit la fonction génératrice de Z

$\phi_Z(t) = \sum_{j=0}^{3} t^j \frac{3!}{j!(3-j)!}(\frac{2}{3})^j(\frac{1}{3})^{(3-j)}$ *(1pt)*

on a à résoudre $8t^3 + 12t^2 - 21t + 1 = 0$, *(1pt)*

les solutions sont : $(t_1 = -5 + 3 * 3^{0.5})/4,\ t_2 = (-5 - 3 * 3^{0.5})/4,\ t_3 = 1$ *(1.5 pts)*

$\rho = 0.049$ *(0.75 pt)*