Université de Tlemcen — Département de Mathématiques
2e Année Master EDP- S3 — Janvier 2022
Théorie de Régularité — Examen Final — 1H30

<u>Les documents sont autorisés</u>

Exercice 1: *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné régulier .*

1. On considère le problème suivant :

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} -\Delta u + u = \dfrac{1}{1+|x|} & dans\ \Omega \\ u = 0 & sur\ \partial\Omega, \end{cases}$$

1. *Écrire la formulation variationnelle du problème $(\mathcal{P})$ et montrer qu'il admet une unique solution v.*
2. *Montrer que v est positive et bornée.*
3. *Justifier que v est une solution classique du problème $(\mathcal{P})$.*

Exercice 2: *Étudier l'existence et l'unicité de la solution forte du problème suivant*

$$(D) \quad \begin{cases} \Delta u(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 & dans\ \Omega \\ u(x,y,z) = x + y + z & sur\ \partial\Omega, \end{cases}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3: *Soient $N \geq 2$ et $u \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$.*

1. *Donner la définition d'une fonction radiale et un exemple.*
2. *En utilisant la densité de $C^\infty_{c,rad}(\mathbb{R}^N)$ dans l'espace $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$, montrer que si $u \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$ alors ;*
   a. $|u(x)| \leq C_N |x|^{-\frac{N-1}{2}} \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}, \quad p.p.\ sur\ \mathbb{R}^N.$
   b. $|x|^{-\frac{N-1}{2}} u(x) \longrightarrow 0, quand\ |x| \longrightarrow \infty.$
   c. *u est, dans un sens à préciser, höldérienne en dehors de l'origine.*

Bonne Courage

Barème: *Exercice 1: 8 pts* *Exercice 2: 6 pts* *Exercice 3: 6pts*

Corrigé

Exercice 1: *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné régulier. On considère le problème suivant :*

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} -\Delta u + u = \dfrac{1}{1+|x|} & dans\ \Omega \\ u = 0 & sur\ \ \partial\Omega, \end{cases}$$

1. *– Écrivons la formulation variationnelle du problème $(\mathcal{P})$.*
   En multipliant l'équation par $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ et en intégrant sur Ω, on trouve par application de la formule de Green,

$$\int_\Omega (\nabla u.\nabla\varphi + u\varphi)\,dx = \int_\Omega f\varphi\,dx,$$

où

$$f(x) = \frac{1}{1+|x|}.$$

Le problème variationnel s'énonce :
Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que

$$\int_\Omega (\nabla u.\nabla\varphi + u\varphi)\,dx = \int_\Omega f\varphi\,dx \qquad \forall\varphi \in H_0^1(\Omega).$$

- *Posons*

$$A(u,\varphi) = \int_\Omega (\nabla u.\nabla\varphi + u\varphi)\,dx, \quad l(\varphi) = \int_\Omega f\varphi\,dx.$$

On vérifie aisément (détailler les calculs) que la forme bilinéaire A définie sur $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ et la forme linéaire sur $H_0^1(\Omega)$ vérifient les hypothèses du théorème de Lax-Milgram.
Donc il existe un unique élément $v \in H_0^1(\Omega)$ solution du problème variationnel associé à $(\mathcal{P})$. **(3 *pts*)**

2. *Montrons que v est positive et bornée.*
Ceci découle directement du principe du maximum relatif au problème de Dirichlet,

$$\mathrm{Min}(\inf_{\partial\Omega} v,\ \ \inf_\Omega f) \le v(x) \le \mathrm{Max}(\sup_{\partial\Omega} v,\ \ \sup_\Omega f). \quad \textbf{(1,5 pt)}$$

Nous obtenons

$$0 \le v(x) \le 1, \qquad \forall x \in \Omega. \quad \textbf{(1,5 pt)}$$

3. *D'après le théorème de Schauder, puisque le domaine* Ω *est borné et régulier et la fonction f est au moins dans* $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}), 0 < \alpha < 1$ *(Montrer que f est lipchitzienne) alors* $v \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ *et est donc solution classique du problème* $(\mathcal{P})$. $(\mathbf{2\ pts})$

Exercice 2: *Étudions l'existence et l'unicité de la solution forte du problème suivant*

$$(D) \quad \begin{cases} \Delta u(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 & dans\ \Omega \\ \quad u(x,y,z) = x + y + z & sur\ \ \partial\Omega, \end{cases}$$

où Ω *est un domaine borné de* $\mathbb{R}^3$.

Rappelons un corolaire donné en cours :

$(\mathbf{3pts})$

<u>*Corollaire*</u>: *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *un domaine borné à frontière régulière,* $f \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ *et* $g \in C(\partial\Omega)$ *alors il existe une solution unique* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *du problème* $\begin{cases} \Delta u = f & dans\ \Omega \\ u = g & sur\ \ \partial\Omega. \end{cases}$

Dans notre cas les fonctions f et g sont de classe C^∞ *sur* Ω *et* $\partial\Omega$ *respectivement. Si on suppose que* Ω *est à frontière régulière, alors le problème* (D) *admet une unique solution u de classe* C^∞ *sur* Ω. $(\mathbf{3\ pts})$

D'ailleurs nous pouvons même expliciter cette solution en termes de la fonction de Green et le noyau de Poisson, à savoir

$$u(x,y,z) = -\int_{\partial\Omega} (X+Y+Z)\frac{\partial G}{\partial \eta}(x,y,z;X,Y,Z)d_s(X,Y,Z)$$
$$- \int_{\Omega} (X^2+Y^2+Z^2)\, G(x,y,z;X,Y,Z)d(X,Y,Z),$$

où G est la fonction de Green relatif à Ω *et* η *est la normale unitaire à* $\partial\Omega$ *dirigée vers l'extérieur de* Ω.

Exercice 3:

Consulter votre cours et détailler les calculs.

Soient $N \geq 2$ *et* $u \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$.

1. *Donner la définition d'une fonction radiale et un exemple.* $(\mathbf{1,5}\ \boldsymbol{pt})$
2. *En utilisant la densité de* $C^\infty_{c,rad}(\mathbb{R}^N)$ *dans l'espace* $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$, *montrer que si* $u \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$ *alors ;*

   a. $|u(x)| \leq C_N |x|^{-\frac{N-1}{2}} \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}, \quad p.p.\ sur\ \mathbb{R}^N$. $(\mathbf{2}\ \boldsymbol{pts})$

   b. $|x|^{\frac{N-1}{2}} u(x) \longrightarrow 0, quand\ |x| \longrightarrow \infty$. $(\mathbf{2}\ \boldsymbol{pts})$

   c. *u est, dans un sens à préciser, höldérienne en dehors de l'origine.* $(\mathbf{1,5}\ \boldsymbol{pt})$