Université de Tlemcen A.U.2021/2022
Département de Mathématiques

Examen Final
de
Introduction aux problèmes hyperboliques

Questions

Les affirmations suivantes sont elles vraies ? justifier votre réponse

1. $(\eta(u), q(u)) = (\frac{u^n}{n}, \frac{u^{n+1}}{n+1}), \forall n \in \mathbb{N}^*$ est un couple entropie-flux d'entropie pour l'équation de Burgers.

2. Si u_0 est négative, l'unique solution classique du problème suivant (1) est définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$.

$$\begin{cases} u_t + cu_x = u^2 \\ u(x,0) = u_0\left(x\right) \end{cases} ; t \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

où $c \in \mathbb{R}$ et $u_0 \in \mathcal{C}^1\left(\mathbb{R};\mathbb{R}\right)$

Exercice 1

Donner l'unique solution faible entropique $u(t,x)$ pour $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$ du problème de Rieman (2).

$$\begin{cases} u_t + \left(\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right)_x = 0 \\ u(x,0) = u_0\left(x\right) \end{cases} ; t \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R} \tag{2}$$

où

$$u_0\left(x\right) : \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad 1 < x < 2 \\ 4 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases} \tag{3}$$

Exercice2

Soient $v \equiv v(x,t) > 0$ le volume spécifique d'un fluide,$u \equiv u(x,t) \in \mathbb{R}$ sa vitesse.On considère le système d'équations aux dérivées partiellese qui décrit la dynamique de ce fluide

$$\begin{cases} v_t - u_x = 0 \\ u_t + \left(\frac{1}{3}v^{-3}\right)_x = 0 \end{cases} ; x \in \mathbb{R}, t > 0 \tag{4}$$

1. Trouver les vecteurs $W : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2$, et $F(W) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$tels que (4)s'écrit sous la forme

$$W_t + \left(F(W)\right)_x = 0 \tag{5}$$

2. Pour quel type de solutions le système(4) prend la forme quasi-linéaire

$$W_t + A\left(W\right)W_x = 0. \tag{6}$$

3. Déterminer les valeurs propres de les vecteurs propres (à droite) de $A(W)$ .Le système est-il strictement hyperbolique ?

4. Préciser la nature des champs 1 et 2 .Existe t-il des discontinuités de contact.

5. On note I_k l'invariant de Riemann du k-ème champ caractéristique. Montrer qu'un choix possible pour I_k, est donné par

$$I_k = u - (-1)^k \frac{1}{v}; k = 1, 2$$

6. Rappeler la définition d'un couple flux-entropie (η, q). Montrer que la fonction

$$\eta(W) := \frac{u^2}{2} + \frac{1}{6v^2}$$

est une entropie du système (5)avec flux d'entropie

$$q(W) := \frac{u}{3v^3}$$

7. Pour un état gauche $W_g = (v_g, u_g)$ donné on cherche les états $W = (v, u)$ qui peuvent être relié à W_g par une 1-onde de choc entropique
7.1 Montrer que $u < u_g, v < v_g$.
7.2 Calculer u en fonction de v_g, u_g et v. Montrer que u peut se mettre sous la forme $u = u_g + \alpha(v_g, v)$.
Étudier la fonction $v \to u = u_g + \alpha(v_g, v)$ et tracer son graphe dans le plan (v, u)

Université de Tlemcen
Département de Mathématiques A.U.2021/2022

Corrigé de l'Examen Final
de
Introduction aux problèmes hyperboliques

Questions $\boxed{\textbf{5pts}}$

1. $\boxed{\text{1.5pt}}$Soit $(\eta(u), q(u)) = (\frac{u^n}{n}, \frac{u^{n+1}}{n+1}), n \in \mathbb{N}$.Bien que $q\prime\,(u) = u$[redacted]$\prime\,(u)$ et $\eta \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on a $(\eta(u), q(u))$ pour n *impair* n'est pas un couple entropie-flux d'entropie pour l'équation de Burgers car $\eta(u)$ n'est pas convexe.

2. $\boxed{\text{3.5pts}}$On applique la méthode des caractéristiques pour

$$\left\{ \begin{array}{c} u_t + cu_x = u^2 \\ u(x,0) = u_0\,(x) \end{array} \right. ; t \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

On obtient:

$$\left\{ \begin{array}{c} x'\,(t) = c \\ x(0) = x_0 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{c} \frac{du}{u^2} = dt \\ u(x(0), 0) = u_0\,(x_0) \end{array} \right.$$

Ce qui permet d'obtenir les caractéristiques $x\,(t) = ct + x_0$.
Et $u\,(x\,(t)\,, t) = \frac{-1}{t+cste}$ avec $u_0\,(x_0) = \frac{-1}{cste}$ce qui permet d'écrire l'expression de la solution

$$u\,(x,t) = \frac{-1}{t - \frac{1}{u_0(x-ct)}} \tag{2}$$

De (2) on voit que si u_0 est négative, la solution classique de (1)est définie pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice1$\boxed{\text{5pts}}$

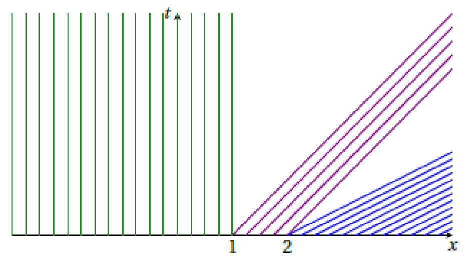
$$\left\{ \begin{array}{c} u_t + \left(\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right)_x = 0 \\ u(x,0) = u_0\,(x) \end{array} \right. ; t \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R} \tag{3}$$

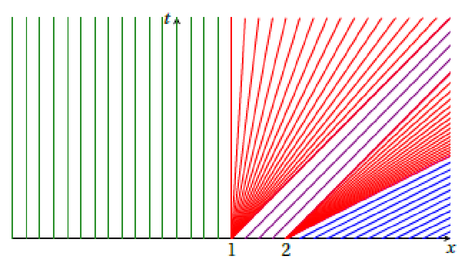
$\boxed{\text{1pt}}$Il s'agit d'une loi de conservation où $f\,(u) = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}$donc $f'\,(u) = \sqrt{u}$; $(f')^{-1}\left(\frac{x-x_0}{t-t_0}\right) = \left(\frac{x-x_0}{t-t_0}\right)^2$.Et $f''\,(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}} > 0$(le flux est convexe).

Alors en considérant $u_0\,(x) : \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & \text{si} & x < 1 \\ 1 & \text{si} & 1 < x < 2 \\ 4 & \text{si} & x > 2 \end{array} \right.$,

$\boxed{\text{2pts}}$L'équation de la caractéristique de pied $(\xi, 0)$ est donc

$$x(t) = \xi + f'\,(u_0\,(\xi))\,t = \xi + t\sqrt{u_0\,(\xi)} = \left\{ \begin{array}{ccc} \xi & \text{si} & \xi < 1 \\ \xi + t & \text{si} & 1 < x < 2 \\ \xi + 2t & \text{si} & x > 2 \end{array} \right.$$





$\boxed{+1\text{pt}}$La donnée initiale a deux sauts croissants, un en $x = 1$ et l'autre en $x = 2$. Puisque le flux f est convexe, on s'attend à ce que la solution faible entropique présente deux ondes de raréfaction centrées l'une en (1,0) et l'autre en (2, 0).$\boxed{2\text{pts}}$

$$u\left(x,t\right)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x<1 \\ \left(\frac{x-1}{t}\right)^2 & \text{si} \quad 1<x<1+t \\ 1 & \text{si} \quad 1+t<x<2+t \\ \left(\frac{x-2}{t}\right)^2 & \text{si} \quad 2+t<x<2+2t \\ 4 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$$

Exercice 2$\boxed{10\text{pts}}$

$$\begin{cases} v_t - u_x = 0 \\ u_t + \left(\frac{1}{3}v^{-3}\right)_x = 0 \end{cases} ; x \in \mathbb{R}, t>0 \tag{4}$$

1. $\boxed{0.5\text{pt}}$On a
$$W_t + \left(F(W)\right)_x = 0 \tag{5}$$
avec $W = \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}$; $F(W) = \begin{pmatrix} -u \\ \frac{1}{3}v^{-3} \end{pmatrix}$

2. $\boxed{0.5\text{pt}}$Pour des solutions régulières, on peut développer les dérivées dans (4) et on trouve le système quasi-linéaire suivant

$$W_t + A(W) W_x = 0. \tag{6}$$

avec $A(W) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -v^{-4} & 0 \end{pmatrix}$.

3. $\boxed{1\text{pts}}$On cherche les deux solutions $\lambda_i(W)$ de l'équation $\det(A(W) - \lambda(W) Id) = 0$, on trouve

$$\lambda_1(W) = -v^{-2} < 0 < \lambda_2(W) = v^{-2}$$

les vecteurs propres à droite correspondants sont

$$r_1(W) = \begin{pmatrix} 1 \\ v^{-2} \end{pmatrix}; r_2(W) = \begin{pmatrix} 1 \\ -v^{-2} \end{pmatrix}$$

$\boxed{0.25\text{pt}}$les valeurs propres sont réelles distinctes donc le système est strictement hyperbolique.

4. $\boxed{1\text{pt}}$Pour déterminer la nature des deux champs caractéristiques on calcule $\nabla\lambda_k.r_k$ pour $k = 1; 2$, on trouve

$$\nabla\lambda_1.r_1 = 2v^{-3} > 0 \text{ et } \nabla\lambda_2.r_2 = -2v^{-3} < 0$$

les deux champs sont vraiment nonlinéaires.
$\boxed{0.25\text{pt}}$Étant donné qu'aucun champ n'est Linéairement Dégénéré, il n'y aura aucune discontinuité de contact.

5. $\boxed{1\text{pt}}$Un choix possible de I_k l'invariant de Riemann du k-ème champ caractéristique est donné par

$$I_k = u - (-1)^k \frac{1}{v}; k = 1, 2$$

car on a bien $\nabla I_k(W) r_k(W) = 0$ pour $k = 1; 2$

6. $\boxed{1.5\text{pts}}$Soient

$$\eta(W) := \frac{u^2}{2} + \frac{1}{6v^2};\ q(W) := \frac{u}{3v^3}$$

Pour vérifier que η est une entropie du système (4)avec le flux d'entropie q on montre que

$$\nabla q(W) = \nabla\eta(W).A(W)$$

$$\nabla q(W) = \begin{pmatrix} -uv^{-4} \\ \frac{1}{3}v^{-3} \end{pmatrix}$$

et

$$\nabla\eta(W) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}v^{-3} \\ u \end{pmatrix}$$

Donc on a

$$\nabla\eta\,(W)\,.A\,(W) = \left(-\frac{1}{3}v^{-3}; u\right) . \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -v^{-4} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -uv^{-4} \\ \frac{1}{3}v^{-3} \end{pmatrix} = \nabla q\,(W)$$

$\boxed{+0.5\text{pt}}$Pour vérifier la convexité de l'entropie on calcule la matrice hessienne :

$$d^2\eta\,(W) = \begin{pmatrix} v^{-4} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

elle est definie positive, alors η est convexe .

7. Pour un état gauche $W_g = (v_g, u_g)$ donné on cherche les états $W = (v, u)$ qui peuvent être relié à W_g par une $1-$onde de choc entropique.
$\boxed{1.\text{pt}}$La condition d'entropie de Lax exige que la vitesse $\gamma_1$du 1- choc vérifie

$$\begin{cases} \lambda_1\,(W) < \gamma_1 < \lambda_2\,(W_g) \\ \gamma_1 < \lambda_1\,(W_g) \end{cases}$$

qui s'ecrit:

$$-v^{-2} < \ \gamma_1 < -v_g^{-2} < 0$$

ce qui entraine $v < v_g$
$\boxed{1\text{pt}}$En utilisant les conditions de Rankine- Hugoniot on trouve

$$\begin{cases} \gamma_1 = \frac{u_g - u}{v - v_g} \\ \gamma_1 = \frac{1}{3}\left(\frac{v^{-3} - v_g^{-3}}{u - u_g}\right) \end{cases}$$

puisque $\gamma_1 < 0$ alors $u < u_g$.
$\boxed{1\text{pt}}$En éliminant γ_1 dans les relations de Rankine-Hugoniot on trouve

$$u = u_g + \alpha(v; v_g)\text{pour } v < v_g$$

où $\alpha(v; v_g) := \sqrt{\frac{1}{3}\left(v_g^{-3} - v^{-3}\right)(v_g - v)}$
et la vitesse du 1-choc $\gamma_1 = -\sqrt{\frac{1}{3}\frac{\left(v^{-3} - v_g^{-3}\right)}{(v_g - v)}}$
De plus en considérant u fonction de v ,on trouve $\begin{cases} u\prime\,(v) = \alpha' > 0 \text{ pour } v < v_g \\ u''\,(v) = \alpha'' < 0 \text{ pour } v < v_g \end{cases}$

On a alors :$\boxed{0.5\text{pt}}$