Université de Tlemcen
Département de Mathématiques

A.U.2021/2022

Examen Final
de
Equations d'évolution

Questions $\boxed{\textbf{4pts}}$

Les affirmations suivantes sont elles vraies ? Justifier votre réponse. Soient E, F deux espaces de Banach.

1. Si$\{S(t)\}_{t\geq 0}$ est un semi groupe généré par l'opérateur A. Alors l'application :$[0,\infty) \ni t \to S(t)x \in E$ est dérivable sur $[0,\infty)$, pour tout $x \in D(A)$ et on a :
$$\frac{d}{dt}S(t)x = S(t)Ax, \forall t \geq 0.$$

2. Si $u : I \to E$ une fonction Bochner intégrable et $T : E \to F$ est un opérateur linéaire continu, alors $Tu : I \to F$ est Bochner-intégrable et
$$\int_I (Tu)(t)dt = T\left(\int_I u(t)dt\right)$$

Exercice1 $\boxed{\textbf{10pts}}$

Soit $\mathcal{O} =]0, L[\times]0, l[$. Pour $u_0 \in L^2(\mathcal{O})$ donné, on considère le problème
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta_x u = 0 & \text{dans } \ \mathcal{O} \times \mathbb{R}^+ \\ u(x,t) = 0 & x \in \partial\mathcal{O} \ \text{ et } t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \mathcal{O}. \end{cases} \tag{1}$$

Soit l'opérateur $A : D(A) \subset L^2(\mathcal{O}) \to L^2(\mathcal{O})$ défini par $Au = -\Delta u$, telque $D(A) = \left\{u \in H_0^1(\mathcal{O}); \Delta u \in L^2(\mathcal{O})\right\}$.Et pour tout $(n,m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$on définit la fonction $e_{n,m}$ par
$$e_{n,m}(x) = \left(\sin \frac{n\pi}{L}x_1\right)\left(\sin \frac{m\pi}{l}x_2\right); \text{où } x = (x_1, x_2) \in \mathcal{O},$$

1. Vérifier que $e_{n,m}$ est une fonction propre de l'opérateur A. Préciser la valeur propre $\lambda_{n,m}$associée.

2. On admetra que $(e_{n,m})_{(n,m)}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathcal{O})$ (c'est-à-dire une famille orthonormale dense dans $L^2(\mathcal{O})$).Ecrire u_0 dans cettre base.

3. En utilisant la méthode de séparation des variables, vérifier que la solution de (1)peut s'écrire:
$$u(t,x) = \sum_{n,m=1}^{+\infty} e^{-\lambda_{n,m}t}\langle u_0; e_{n,m}\rangle_{L^2(\Omega)} e_{n,m}(x); t \geq 0, x \in \mathcal{O} \tag{2}$$

4. Ecrire (1) sous la forme d'un problème de Cauchy abstrait que l'on notera (Pc).

5. Vérifier que l'opérateur A est un opérateur m-accrétif dans l'espace de Hilbert $L^2(\mathcal{O})$.

6. Montrer l'existence et l'unicité de solution appartenant à $\mathcal{C}^1\left([0,+\infty[\right.$, $L^2(\mathcal{O}))$ pour le problème (Pc) (Enoncer le(s) théorème(s) utilisé(s)) .

Exercice2 $\boxed{\textbf{6pts}}$

Soient Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^n$, $T>0$ un temps final, $u_0 \in L^2(\Omega)$ une donnée initiale , et $f \in L^2(]0,T[\,;L^2(\Omega))$.On considère le problème aux limites suivant

$$\left\{\begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta_x u = f & \text{p.p dans } \ \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u = 0 & \text{p.p sur } \ \partial\Omega \ \times \left]0,T\right[, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{p.p dans } \Omega. \end{array}\right. \tag{3}$$

1. En supposant que la solution u de (3) est assez régulière dans $]0,T[$, montrer que, pour tout $t \in [0;T]$, on a l'égalité d'énergie suivante

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} u\,(x,t)^2\,dx + \int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} \left|\nabla u\,(x,s)\right|^2 dxds \\ = \; & \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} u_0\,(x)^2\,dx + \int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} f\,(x,s)\,u(x,s)dxds \end{aligned}$$

2. Donner la formulation variationnelle de (3)que l'on notera (PV) .

3. Montrer que (PV)admet une unique solution. $u \in L^2(]0,T[\,;H_0^1(\Omega)) \cap \mathcal{C}([0;T]\,;L^2(\Omega))$.(préciser le(s) théorème(s) utilisé(s)).

Université de Tlemcen A.U.2021/2022
Département de Mathématiques

Corrigé de l'**Examen Final**
de
Equations d'évolution

Questions $\boxed{\textbf{4pts}}$
$\boxed{2+2}$ Les deux affirmations sont vraies (voir notes de cours)
Exercice**1** $\boxed{\textbf{10pts}}$
Soit $\mathcal{O} =]0, L[\times]0, l[$. Pour $u_0 \in L^2(\mathcal{O})$ donné, on considère le problème

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta_x u = 0 & \text{dans } \ \mathcal{O} \times \mathbb{R}^+ \\ u(x,t) = 0 & x \in \partial\mathcal{O} \ \text{ et } t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \mathcal{O}. \end{cases} \tag{1}$$

Soit l'opérateur $A : D(A) \subset L^2(\mathcal{O}) \to L^2(\mathcal{O})$ défini par $Au = -\Delta u$, telque $D(A) = \left\{u \in H_0^1(\mathcal{O}); \Delta u \in L^2(\mathcal{O})\right\}$ .Et pour tout $(n,m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$on définit la fonction $e_{n,m}$ par

$$e_{n,m}(x) = \left(\sin \frac{n\pi}{L} x_1\right) \left(\sin \frac{m\pi}{l} x_2\right); \text{où } x = (x_1, x_2) \in \mathcal{O},$$

1. $\boxed{1.5\text{pt}}$ On a $-\Delta e_{n,m}(x) = \left(\frac{n^2\pi^2}{L^2} + \frac{m^2\pi^2}{l^2}\right) e_{n,m}(x)$. Donc $e_{n,m}$ est une fonction propre de l'opérateur A associée à la valeur propre $\lambda_{n,m}=\left(\frac{n^2\pi^2}{L^2} + \frac{m^2\pi^2}{l^2}\right)$.

2. $\boxed{1\text{pt}}$ $u_0 \in L^2(\mathcal{O})$ et $\left(e_{n,m}\right)_{n,m}$ base hilbertienne de $L^2(\mathcal{O})$ alors

$$u_0 = \sum_{n,m=1}^{+\infty} \langle u_0; e_{n,m}\rangle_{L^2(\mathcal{O})} e_{n,m} \tag{2}$$

3. $\boxed{2.5\text{pts}}$ On cherche la solution de (1)sous la forme $u(t,x) = f(t)\, g(x)$,alors f et g vérifient:

$$\begin{cases} \Delta g - \lambda g = 0 \ \text{ dans} \mathcal{O} \\ g = 0 \ \text{ sur } \partial\mathcal{O} \end{cases} ; \{f' - \lambda f = 0 \ , f(0)\, g(x) = u_0(x)$$

g vérifie $\Delta g = \lambda g$ donc c'est une fonction propre de A on peut prendre $g = e_{n,m}$ avec $\lambda = \lambda_{n,m}$. par suite $f(t) = Cste.e^{-\lambda_{n,m} t}\, (f(0) = Cste)$ Et par la condition initiale $f(0)\, g(x) = u_0(x)$ et l'expression(2) on obtient pour tout $t \geq 0$ et $x \in \mathcal{O}$

$$u(t,x) = f(t)\, g(x) = \sum_{n,m=1}^{+\infty} e^{-\lambda_{n,m} t} \langle u_0; e_{n,m}\rangle_{L^2(\mathcal{O})} e_{n,m}(x); \tag{3}$$

4. $\boxed{\text{1.5pts}}$On définit l'pérateur $\mathbf{u}:\mathbb{R}^{+}\rightarrow H_0^1(\mathcal{O})$ tel que $\mathbf{u}(t)$=$u(t,.)$,(1) peut s'écrire alors sous la forme d'un problème de Cauchy :

$$\left\{\begin{array}{c} \frac{d\mathbf{u}}{dt}+Au=0 \\ \mathbf{u}\left(0\right)=u_0. \end{array}\right. \tag{(Pc)}$$

5. $\boxed{\text{2pts}}$$A:D(A)\subset L^2(\mathcal{O})\rightarrow L^2(\mathcal{O})$ est un opérateur m accrétif dans l'espace de Hilbert $L^2(\mathcal{O})$ car on a, $\left\{\begin{array}{c} \langle Au,u\rangle\geq 0,\forall u\in D(A) \\ (Id+A)surjectif \end{array}\right.$ en effet;

$$\langle Au,u\rangle=\int\limits_{\mathcal{O}}\left(-\Delta u\right)udx=\int\limits_{\mathcal{O}}\left|\nabla u\right|^2dx\geq 0$$

et par application du théorème de Lax- Milgram l'edp $-\Delta u+u=f$ admet une solution dans $H_0^1(\mathcal{O})$ pour tout $f\in L^2(\mathcal{O})$.

6. $\boxed{\text{1.5pt}}$Par le Théorème de Lumer-Phillips, l'opérateur A dans $L^2\left(\mathcal{O}\right)$ étant m-accrétif est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions $\left(T\left(t\right)\right)_t$sur $L^2\left(\mathcal{O}\right)$ et le problème de Cauchy abstrait (Pc) admet pour solution $\mathbf{u}\left(t\right)=T(t)u_0$. Et telle que $u\left(t,x\right)=\left(T(t)u_0\right)(x)$est solution du problème initial.

$-----------$

$\boxed{+2}$En effet

$$\forall\psi\in D'\left(\mathbb{R}^{+}\right),\mathbf{u}_{\psi}:=\int\limits_0^{\infty}\psi\left(t\right)\mathbf{u}\left(t\right)dt\in H_0^1\left(\mathcal{O}\right) \tag{4}$$

et

$$-\Delta\mathbf{u}_{\psi}=\mathbf{u}_{\psi'}$$

et pour $\varphi\in\mathcal{D}\left(\mathcal{O}\right)$,on a

$$\langle-\Delta\mathbf{u},\psi\left(t\right)\varphi\left(x\right)\rangle:=\langle-\frac{\partial u}{\partial t},\psi\left(t\right)\varphi\left(x\right)\rangle\in H_0^1\left(\mathcal{O}\right)$$

Les sommes finies de fonctions du type $\psi\left(t\right)\varphi\left(x\right)$ étant denses dans $\mathcal{D}\left(\mathbb{R}^{+}\times\mathcal{O}\right)$, on en déduit que u est sol de l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\Delta u=0$$

dans $\mathcal{D}'\left(\mathbb{R}^{+}\times\mathcal{O}\right)$, la condition initiale $u(0)=u_0$, et la condition 4, qui assure, en un sens faible, la condition de Dirichlet.

Exercice2$\boxed{\textbf{6pts}}$

Soient Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^n$, $T > 0$ un temps final, $u_0 \in L^2(\Omega)$ une donnée initiale , et $f \in L^2(]0,T[\,; L^2(\Omega))$.On considère le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta_x u = f & \text{p.p dans } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u = 0 & \text{p.p sur } \partial\Omega \times]0,T[\,, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{p.p dans } \Omega. \end{cases} \tag{5}$$

1. $\boxed{\text{2pts}}$En supposant que la solution u de (5) est assez régulière dans $]0,T[$.En intégrant le produit de l'équation d'évolution par u sur Ω, on obtient

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial t} u - \Delta u u \right) dx = \int_\Omega f u dx$$

Par intégration par partie et en échangeant l'opérateur de dérivation en temps et intégrale, on arrive à

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \int_\Omega u^2 dx \right) + \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx = \int_\Omega f u dx$$

Il suffit alors d'effectuer une intégration en temps pour obtenir l'égalité .

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_\Omega u\,(x,t)^2 \, dx + \int_0^t \int_\Omega |\nabla u\,(x,s)|^2 \, dx ds \\ = \; & \frac{1}{2} \int_\Omega u_0\,(x)^2 \, dx + \int_0^t \int_\Omega f\,(x,s)\, u(x,s) dx ds \end{aligned}$$

2. $\boxed{\text{2pts}}$On multiplie l'équation de la chaleur par une fonction test $v \in H_0^1(\Omega)$, et on intègre sur Ω

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t} v dx - \int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \int_\Omega f v dx \tag{6}$$

Comme ni Ω ni $v\,(x)$ ne varient avec le temps t, (6) peut s'écrire

$$\frac{d}{dt} \int_\Omega u\,(x,t)\, v\,(x)\, dx - \int_\Omega \nabla u\,(x,t)\, \nabla v\,(x)\, dx = \int_\Omega f\,(x,t)\, v\,(x)\, dx$$

On considère le produit scalaire de $\mathrm{L}^2(\Omega)$ et la forme bilinéaire

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx$$

pour obtenir la formulation variationnelle suivante: Trouver $\mathbf{u}:[0,T]\rightarrow H_0^1(\Omega)$tel que

$$\left\{\begin{array}{c} \frac{d}{dt}\langle \mathbf{u}(t),v\rangle + a(\mathbf{u}(t),v) = \langle \mathbf{f}(t),v\rangle, \forall v\in H_0^1(\Omega) \;\; 0<t<T \\ \mathbf{u}(0)=u_0 \end{array}\right. \tag{(PV)}$$

3. $\boxed{\text{2pts}}$$(PV)$admet une unique solution. $u\in L^2(]0,T[\,;H_0^1(\Omega))\cap\mathcal{C}([0;T]\,;L^2(\Omega))$d'après le théorème de cours car $H_0^1(\Omega)\subset L^2(\Omega)$ sont deux espaces de Hilbert avec injection compacte et la forme bilinéaire $a(.,.)$est continue symétique et coercive dans $H_0^1(\Omega)$ $u_0\in L^2(\Omega)$ et $f\in L^2\left(]0,T[\,;L^2(\Omega)\right)$
(Ω étant borné , la coercivité de $a(.,.)$ découle de l'inégalité de Poincaré)